

## PHYSIK UND CHEMIE.

## NEUE FOLGE. BAND XLVII.

**I. Ueber den Temperaturcoefficienten des  
electrischen Widerstandes von Quecksilber und die  
Quecksilberwiderstände der Reichsanstalt;  
von D. Kreichgauer und W. Jaeger.**

(Mittheilung aus der ersten Abtheilung der physik.-techn. Reichsanstalt.)

(Hierzu Taf. VII A. Fig. 1—9.)

Die in der Reichsanstalt ausgeführte Construction von Normalquecksilberwiderständen gab <sup>1)</sup> Veranlassung, die Veränderung des electrischen Widerstandes von Quecksilber mit der Temperatur zu bestimmen, obwohl dieselbe für die erwähnte Construction von keiner Bedeutung war, da alle Messungen bei Null Grad angestellt sind. Es erschien aber ein neuer Beitrag zur Kenntniss dieser Grösse wünschenswerth, da die Angaben über den Temperaturcoefficient so weit auseinandergehen, dass es unmöglich ist, die verschiedenen Constructionen des legalen Ohm unter sich zu vergleichen <sup>2)</sup>; denn eine grosse Anzahl derselben ist nicht bei Null Grad ausgeführt worden.

Als Copien der Normalwiderstände wurden schon von W. v. Siemens und seither von mehreren Beobachtern (Mascart, Benoît, Salvioni etc.) Quecksilberwiderstände von bequemerer Form hergestellt, doch hat sich deren Verwendung durchaus nicht eingebürgert, obwohl sie doch die Normalen am besten ersetzen müssten und man mit Drahtcopien vielfach recht schlimme Erfahrungen gemacht hat. <sup>3)</sup> Der Grund

1) Die Veröffentlichung über die Construction der Hauptnormale wird demnächst folgen.

2) Bei Anwendung der extremen Angaben über den Temperaturcoefficienten, würde durch Reduction von 10° auf 0° eine Unsicherheit von 0,0003 Ohm, von 20° auf 0° eine solche von 0,0005 Ohm entstehen (vgl. Fig. 9).

3) Auch in England hat man die bisher als Urnormale dienenden Drahtwiderstände verlassen, da diese sprungweise Aenderungen zeigten.

mag wohl in dem grossen Temperaturcoefficienten des Quecksilbers liegen und zum Theil auch darin, dass alle Copien, ausser den von Mascart vorgeschlagenen, immer neu gefüllt werden müssen, wodurch die Benutzung derselben so zeitraubend wird, wie die der Normalen selbst. Aus diesen Gründen wurden in der Reichsanstalt hermetisch geschlossene Quecksilbercopien hergestellt, deren Benutzung kaum mehr Umstände verursacht, als die von Drahtwiderständen, und die sich auch fast mit derselben Genauigkeit wie jene vergleichen lassen. Da diese Copien zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten vorzugsweise Verwendung fanden, so soll ihre Beschreibung hier folgen.

Ihre Form und Einrichtung ist aus Fig. 1, 2 und 3 ersichtlich. Sie bestehen, wie die Normale, aus Jenaer Glas XVI<sup>m</sup>, und sollen ebenso wie jene nur bei Null Grad verwendet werden; daher wurden sie durch Zuschmelzen gegen äussere Einflüsse vollständig geschützt, nachdem sie im Vacuum fast ganz mit Quecksilber gefüllt waren. Um die Wärmeleitung von aussen möglichst zu vermeiden, verwendete man als Zuleitungsdrähte für jedes Ende je drei dünne, eingeschmolzene Platindrähte (Fig. 3), von denen der oberste *H* den Hauptstrom zuführt, der mittlere *N* zum Nebenschluss, und der untere *G* zum Galvanometer geht. Diese Anordnung gewährt den Vortheil, dass alle Zuleitungen fest mit dem Glas verbunden sind, und dass der Widerstand bei bequemer Handhabung desselben von einem unveränderlichen Punkte *s* (Fig. 3) des Endgefässes zählt, wodurch die Anwendung ganz dünner Verbindungsdrähte (0,3 mm) ermöglicht wird.<sup>1)</sup> Die in einer durchlöchernten Messinghülse montirte Copie (Fig. 1 und 2) wird in eine mit Petroleum

Die für den technischen Gebrauch jedenfalls vortrefflich constanten Manganinwiderstände der Abth. II der P. T. R. (System Feussner) sind noch nicht hinreichend lange untersucht, um sie auch für die höchsten Anforderungen als zuverlässige Copien verwenden zu können.

1) Man pflegt häufig, gezwungen durch die Wahl der Methode für die Widerstandsmessung, dicke Kupferzuleitungen zu verwenden und diese in den zu messenden Widerstand einzubeziehen; daraus entstehen Fehlerquellen 1. durch die beträchtliche, unberechenbare Wärmeleitung und 2. durch Thermokräfte, welche an den zum Widerstand gehörigen Contactstellen (Kupfer-Quecksilber) auftreten.



ganz angefüllte Messingbüchse soweit eingeschoben, dass auch die Klemmen noch ganz von Petroleum bedeckt sind. Dieses zweite Gefäss *K* ist mit einem Hartgummideckel verschlossen, und steht bis an den oberen Rand in einem Gemisch aus feinem Eis und Wasser (wie es für die Eispunkte der Thermometer verwendet wird). Die Messung in Eis bietet gerade für die Copien noch den besonderen Vortheil, dass jede Ausbildung von Schichten mit verschiedener Temperatur ausgeschlossen ist. Damit das ganze Quecksilber der Copien möglichst vollständig von Petroleum von 0° umgeben ist, führen von den Klemmen *H*, *G*, *N* längere Kupferdrähte zu den Platindrähten. Die Dimensionen der in grösserer Anzahl hergestellten Copien wurden sehr verschieden gewählt, um constante Fehler zu vermeiden.

#### Methoden der electrischen Vergleichung.

Von allen gebräuchlichen Methoden konnte nur die des *übergreifenden Nebenschlusses* <sup>1)</sup> in Betracht kommen, da bei dieser allein dicke Zuleitungen entbehrlich sind und zugleich Thermokräfte und Verbindungswiderstände eliminirt werden. Da es aber erwünscht war, zwei im Princip von einander unabhängige Messverfahren zu benützen, so wurde noch eine Methode angewendet, bei der kein Ende des Widerstandes an einer Verzweigungsstelle des Stromes liegt, und bei der das Galvanometer, welches die Gleichheit der Widerstände constatirt, stromlos ist.

*Uebergreifender Nebenschluss.* Das (bei beiden Methoden) benutzte Thomson'sche Differentialgalvanometer von Elliot besitzt in jedem Zweig einen Widerstand von 3 Ohm und hat bei 2 m Scalenabstand und ca. 4 Secunden Schwingungsdauer der Nadel eine Empfindlichkeit von etwas über  $10^{-8}$  Ampère pro Scalenthail von 1 mm. Es wurden Messungen angestellt, bei denen in jedem Galvanometerzweig einige Zehntel, 2, 16, 100 oder 1000 Ohm Ballast (I u. II, Fig. 4) eingeschaltet waren, doch konnte nur im ersten Falle eine einseitige Ab-

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 20. p. 76. 1883. — Es ist in hohem Maasse verwunderlich, dass dieses Messungsverfahren so selten Verwendung findet, obgleich es bei möglichster Bequemlichkeit schnell zu genauen Resultaten führt. (Vgl. Beispiel p. 518).

weichung des Resultates von wenigen Millionstel constatirt werden. Für die definitiven Versuche bediente man sich nur der Ballastwiderstände von 16 oder 100 Ohm.

Um zu erreichen, dass die Messungen bei so kleinem Galvanometerwiderstand übereinstimmende Resultate ergeben, muss zweierlei beobachtet werden. Zunächst muss das Galvanometer zur Vermeidung von Widerstandsänderungen in demselben und von Thermokräften sehr sorgfältig gegen alle Temperaturschwankungen geschützt werden. Das schon von einer Glasglocke umgebene Galvanometer wurde deshalb noch in Watte eingehüllt und ausserdem das ganze Instrument in einen grösseren Pappkasten gestellt, der nur eine kleine Oeffnung zum Ablesen der Scale besitzt. Ferner sollte man sich nicht auf die einmalige Justirung des Differentialgalvanometers verlassen (was bei grossem Galvanometerwiderstand erlaubt ist), sondern die Gleichheit der Galvanometerzweige vor jeder Messung immer wieder dadurch herstellen, dass man durch geeigneten Nebenschluss den Ballastwiderstand II des einen Zweiges regulirt.<sup>1)</sup> Ein Fehler in der Justirung um 1 Scalentheil erzeugte im Mittel einen Fehler der Widerstandsmessung von 0,5 Millionstel Ohm. Es ist bei Anwendung eines kleinen Galvanometerwiderstandes von Vortheil, den Commutator  $K_2$  (Fig. 4) einzuschalten, um ohne Lösung der Stromverbindungen die richtige Justirung des Instrumentes controliren zu können. Als Resultat nahm man das Mittel aus den Messungen in beiden Stellungen des Commutators  $K_2$ , welche übrigens nur in seltenen Fällen um mehrere Millionstel des Widerstandes abwichen.

1) Es ist nicht nöthig, dass sowohl der Widerstand der beiden Zweige, als auch deren Wirkung auf die Nadel völlig gleich sind, vielmehr braucht nur, ohne zu grosse Abweichung von diesen Verhältnissen, die aus beiden Factoren resultirende Gesamtwirkung dieselbe zu sein. Das Verhältniss der Wirkungen beider Zweige auf die Nadel ändert sich bei dem benutzten Elliot'schen Galvanometer im Laufe einiger Tage um Bruchtheile eines Millionstel; die Einstellung auf Gleichheit lässt sich dann am einfachsten dadurch erreichen, dass man eine der Fusschrauben etwas dreht. Dadurch wird die Nadel mehr oder weniger einer unsymmetrisch angebrachten kleinen Spule genähert, welche dem schwächeren Zweige ein für allemal zugefügt werden muss, um die vom Constructeur niemals vollkommen erreichte Gleichheit beider Hälften herzustellen.

Principiell tritt bei dieser Methode, bei welcher das Galvanometer nicht stromlos ist, (wenigstens für kleinen Galvanometerwiderstand) das Bedenken auf, dass infolge der Ablenkung der Stromlinien (Fig. 5) die Aequipotentialflächen bei *A* und *B* nicht mehr parallel verlaufen. Die Anwendung verschieden grosser Ballastwiderstände in den Galvanometerzweigen liess jedoch erkennen, dass man diesen Einfluss unter den gewählten Verhältnissen noch vernachlässigen darf, wie aus den folgenden Messungen hervorgeht. Diese betreffen die im December 1891 vorgenommenen Vergleichen eines geraden Rohres *V* mit dem Manganinwiderstand n° 149.

n° 149 - *V*.

Nr.	Ballast 2 Ohm	Nr.	Ballast 10 Ohm	Nr.	Ballast 100 Ohm
1.	508.10 <sup>-6</sup>	2.	508.10 <sup>-6</sup> 7. 509.10 <sup>-6</sup>	3.	508.10 <sup>-6</sup> 4. 512.10 <sup>-6</sup>
		9.	512 11. 512	5.	511 6. 512
		12.	510 13. 510	8.	511 10. 511
		16.	511 17. 511	14.	509 15. 509
		18.	510 19. 509		
		20.	510 21. 512		
		22.	511		

Die Messungen folgten sich in der angegebenen Ordnung und waren auf einen Tag ziemlich gleichmässig vertheilt.

In einem anderen Falle wurde gefunden

	Ballast 30 Ohm	Ballast 50 Ohm
$V_2 - n^{\circ} 151$	= 0,000 112 Ohm	= 0,000 112 Ohm 112 <sub>5</sub> „

Um auch einen Anhalt über die Genauigkeit der nach dieser Methode gewonnenen Resultate zu geben, folgt hier eine Reihe der bei Zimmertemperatur angestellten und auf 18,0° reducirten Vergleichen von vier Manganinwiderständen<sup>1)</sup> in allen Combinationen. Der Messstrom betrug ungefähr 0,01 Ampère, die Gesamtdauer der Beobachtungen ca. 20 Minuten. Jede Zahl ist eine einzige Beobachtung.

1) Diese Widerstände besitzen bekanntlich sehr geringe Temperaturcoefficienten und haben sich während mehrerer Monate ihrer Beobachtung nur in geringem Maasse geändert.

	I	II	III
$n^{\circ} 150 - n^{\circ} 151$	0,000 038	38	$0 \cdot 10^{-6}$
150 — 148	127 <sub>5</sub>	128	— 0 <sub>5</sub>
150 — 149	17 <sub>5</sub>	18	— 0 <sub>5</sub>
149 — 148	110	110	0
149 — 151	20 <sub>5</sub>	20	+ 0 <sub>5</sub>
151 — 148	90	90	0

Spalte I enthält die beobachteten, II die nach der Thiesen'schen Methode<sup>1)</sup> ausgeglichenen Differenzen, III die Unterschiede zwischen Beobachtung und Ausgleichung. Der grösste übrig bleibende Fehler beträgt also nur 0,0000005 Ohm.

*Doppelbrücke.* Das Princip dieses zweiten Messverfahrens ist aus Fig. 6, 7, 8 ersichtlich. Bei  $M$  und  $N$  verzweigt sich der Strom nach den beiden Widerständen  $W_1$  und  $W_2$ ; in  $MC$  und  $MA$  liegen die beiden Zweige eines gut corrigirten Differentialgalvanometers ( $G_1$ , Fig. 7 und 8), durch welches die Prüfung der Gleichheit des Stromes in den beiden Zweigen  $MW_1N$  und  $MW_2N$  ermöglicht wird. Nun lässt sich durch Anlegung geeigneter Nebenschlüsse erreichen, dass sowohl in dem Zweige  $AC$  als auch in  $BD$  keine Potentialdifferenz vorhanden ist, was durch die beiden Zweige des zweiten Differentialgalvanometers  $G_2$  geprüft wird; dann muss zwischen  $AB$  und  $CD$  der gleiche Widerstand liegen.

Zur einwurfsfreien Ausführung der Methode sind allerdings etwas complicirtere Einrichtungen erforderlich. Die gewählte definitive Anordnung ist aus Fig. 8 ersichtlich.  $K_1, K_2, K_3, K_4$  sind Commutatoren aus Kupfer (zur Vermeidung der in Quecksilber- und Messingcommutatoren auftretenden Thermokräfte);  $S_1, S_2, S_3, S_4$  sind Nebenschlüsse,  $W_1$  und  $W_2$  die zu vergleichenden Widerstände; die Spule  $J$  (Fig. 8) dient zur Compensirung der Selbstinduction. Selbstverständlich müssen  $G_1, G_2$  sowie sämtliche Hülfs Widerstände sorgfältig gegen Temperaturänderungen geschützt sein.<sup>2)</sup> Wie

1. M. Thiesen, Karl's Rep. 15. p. 285. 1879.

2) In der neuesten Zeit sind in der Reichsanstalt Versuche angestellt worden, um ein Widerstandmaterial zu finden, das einen kleinen Temperaturefficienten besitzt, ohne Thermokräfte gegen Kupfer zu zeigen, und es ist unter den Manganinlegirungen bereits eine gefunden worden, die der geforderten Bedingung entspricht. Die Verwendung dieser Legirung würde manche zeitraubende Vorkehrungen entbehrlich machen.

beim übergreifenden Nebenschluss wurden auch hier die Messungen so angeordnet, dass sich aus ihnen die Controlle des Differentialgalvanometers von selbst ergab. Würde man die beiden Galvanometerzweige von  $G_1$  bei  $MC$  und  $NB$  einschalten, so wäre es offenbar nicht nöthig, die ganze Combination so abzugleichen, dass weder durch  $AC$  noch durch  $BD$  ein Strom fliesst, wenn man nur die beiden Galvanometerzweige von  $G_2$  so einschaltet, dass sie im entgegengesetzten Sinn auf die Nadel wirken. Sind nämlich die in der Pfeilrichtung (Fig. 6) fliessenden schwachen Ströme einander gleich, sodass die Nadel keinen Ausschlag gibt, dann ist ebenfalls  $AB = CD$  (wenn natürlich die Widerstände  $CA$  und  $DB$  annähernd abgeglichen sind).

Bei den Interpolationen sind immer beide Galvanometer zugleich abzulesen und die Ausschläge gesondert zu berücksichtigen. Die einem Scalentheil in  $G_1$  entsprechende Aenderung des Stromverhältnisses in beiden Theilen bestimmt man am besten nach jeder Messung durch Variirung des Nebenschlusses  $S_2$  nach Oeffnung von  $K_3$  und  $K_4$ .

Auch bei der einfachen Form der Wheatstone'schen Brücke müsste man zur Erzielung der höchsten Genauigkeit in die eine Hälfte ein Differentialgalvanometer einschalten, da der zum Vertauschen beider Zweige nöthige Commutator beim Umlegen einerseits neue, wenn auch minimale, Widerstände und Spannungsdifferenzen einführt, andererseits einen kleinen Bruchtheil derselben gar nicht vertauscht.

Als Beispiel sei hier die an demselben Tage ausgeführte Vergleichung von Rohr  $V_2$  mit  $n^0 151$  angeführt; man fand als Differenz

mit der Doppelbrücke	0,000 110 Ohm
mit übergr. Nebenschluss	0,000 112 „
	112 <sub>5</sub>
	112

Als weiteres Beispiel diene die Vergleichung der Drahtwiderstände  $n^0 151$  und  $n^0 150_1$

Doppelbrücke	Uebergr. Nebenschluss
939 . $10^{-6}$	940,5 . $10^{-6}$ Ohm
942	940
940 <sub>5</sub>	940

In allen Fällen wurden die beiden zu vergleichenden Widerstände durch Anlegung eines Nebenschlusses an den grösseren einander nahezu gleich gemacht und dann durch geringe Variirung des Nebenschlusses nach beiden Seiten des richtigen Werthes interpolirt. Der Nebenschluss bestand aus dem vorzüglich abgeglichenen Siemens'schen Widerstandssatz (Nickelin) n° 5039, welcher nach den bei Gewichtssätzen gebräuchlichen Methoden <sup>1)</sup> unter Zuhülfenahme eines zweiten Satzes sorgfältig etalonirt und auf absolute Werthe reducirt war. Weil die Nebenschlüsse im ungünstigsten Fall (bei Bestimmung des Temperaturcoefficienten) nur 35 Ohm betrugten, so mussten die Widerstände der Zuleitungsdrähte zu dem Nebenschlusse, sowie die Widerstände der Stöpsel und der zu den einzelnen Rollen führenden Kupfersäulen im Kasten mit in Rechnung gezogen werden. <sup>2)</sup> Bei Berücksichtigung dieser Correctionen erhielt man stets sehr befriedigende Resultate. Die Genauigkeit der Vergleichung bleibt auch bei den Quecksilbercopien nicht wesentlich hinter der zurück, welche sich bei gut construirten Drahtwiderständen erreichen lässt (vgl. Beispiel p. 521).

Es war nicht gut möglich, alle 16 Copien in sämtlichen Combinationen untereinander zu vergleichen, sie wurden deshalb in verschiedene Gruppen zu je 5 eingetheilt, und zwar derart, dass einige Copien in mehrere Gruppen gleichzeitig eingingen. Für jede Gruppe konnte man dann 10 Vergleichungen (somit 6 überschüssige) ausführen, welche nach der Thiesen'schen Methode ausgeglichen wurden. Als Beispiel einer solchen Gruppenausgleichung, in welcher wie immer jede Zahl einer einzigen Beobachtung entspricht, seien die Vergleichungen vom 8. September 1892 angeführt. Die Stärke des Messstromes betrug wie gewöhnlich 0,01 Ampère:

1) Thiesen, Travaux et Mémoires du Bureau intern. des Poids et Mesures (im Druck).

2) 1 Stöpsel = 0,000 15 Ohm; 1 Kupfersäule 0,000 45 Ohm; Widerstand zwischen einer Klemme *N* (Fig. 1) und der Kreuzungsstelle *r* (Fig. 3) mit dem Hauptstrom in der Ampulle ca. 0,025 Ohm.

$1/w - 1/w_1$	I	II	III
von $n^0 118 - n^0 100 = 0,005\ 000$		4 997	$+ 3 \cdot 10^{-6}$
114 100	8 481	8 483	- 2
116 100	0 075	0 077	- 2
116 107	1 569	1 570	- 1
100 107	1 493	1 493	0
118 107	6 490	6 490	0
114 107	9 976	9 976	0
114 116	8 405	8 406	- 1
118 116	4 918	4 920	- 2
114 118	3 489	3 486	+ 3

Die Spalten I, II, III haben dieselbe Bedeutung, wie bei der Reihe p. 518.

Auch die Messungen an verschiedenen Tagen zeigen nur Abweichungen innerhalb der Beobachtungsfehler; diese Differenzen könnten schon durch eine Unsicherheit der Temperatur von  $0,002^0$  hervorgebracht werden.

$1/w$ von	Abweichungen vom Mittelwerth der 5 Copien		Differenz 17./VIII. bis 18./VIII.
	am 17./VIII.	am 18./VIII.	
$n^0 111$	- 0,001 214	- 0,001 215	$+ 1 \cdot 10^{-6}$
$n^0 107$	- 1 135	- 1 136	+ 1
$n^0 100^1)$	+ 0 328	+ 0 330	- 2
$n^0 116$	+ 0 436	+ 0 435	+ 1
$n^0 102$	+ 1 585	+ 1 587	- 2

Die Differenzen der an beiden Tagen angestellten Messungsreihen erreichen nur 2 Millionstel Ohm.<sup>2)</sup> Auch für längere Zeit blieben die Copien, deren Construction gut gelungen war, bisher (Beobachtungszeit 3 Monate), wie aus wiederholt vorgenommenen Messungen ihrer Differenzen her-

1) Ueber eine bei dieser Copie aufgetretene Erscheinung, wird später im Zusammenhang mit analogem Verhalten der Normalröhren berichtet werden.

2) Es ist überraschend, dass die von verschiedenen Beobachtern nachgewiesene, auch im Vacuum nur unvollkommen zu entfernende Flüssigkeitsschicht (nach Bunsen 0,001 mm) an glatten Flächen, besonders an Glas und Krystall ihre Dicke so wenig verändert; denn bei den kürzesten Copien (35 cm) würde einer Dickenänderung dieser Schicht um  $3 \cdot 10^{-7}$  mm, d. h. um etwa den zweitausendsten Theil der mittleren Wellenlänge des Lichtes, schon einer Aenderung von  $2 \cdot 10^{-6}$  Ohm entsprechen, welche noch constatirt werden können.



vorgeht, innerhalb der Beobachtungsfehler von 2 bis 3 Millionstel Ohm, vollkommen constant. Ob der absolute Betrag der gleiche bleibt, wird sich erst nach längeren Zeiträumen constatiren lassen, denn der einzige feste Anhaltspunkt ist durch die Siemens'sche Definition gegeben. Die relative Constanz von Drahtwiderständen ist nach den bisherigen Erfahrungen geringer.

*Temperaturcoefficient.* Bei allen Bestimmungen, wie die vorliegenden, ist die richtige Messung der Temperatur von der grössten Wichtigkeit; die Differenzen in den verschiedenen Untersuchungen über den Temperaturcoefficient sind zweifellos zum grossen Theil auf eine mangelhafte Temperaturbestimmung zurückzuführen.

Die Reichsanstalt hat als empirische Temperaturscala die scheinbare Ausdehnung von Quecksilber in Jenaer Glas XVIII angenommen, und besitzt eine grosse Anzahl individuell (für Kaliber, Fundamentalabstand, inneren und äusseren Druck, thermische Nachwirkung, Nullpunkt) sehr gut untersuchter Thermometer <sup>1)</sup> aus diesem Glas, sowie eine Anzahl Tonnelot'scher Thermometer, wie sie im internationalen Meterbureau Verwendung finden. Die Vergleichung dieser Instrumente, welche in der Reichsanstalt durchgeführt ist, verbürgt die Einheitlichkeit der Temperaturscala der Reichsanstalt und des erwähnten Bureaus. Die Angaben der hier benutzten Thermometer aus Jenaer Glas wurden, wie üblich, auf die Wasserstoffscala reducirt, und zwar mit Hülfe der von P. Chappuis beobachteten Werthe. <sup>2)</sup>

Es soll hier nochmals darauf hingewiesen werden, von welch grosser Wichtigkeit der richtige Gebrauch eines guten Thermometers ist. Vernachlässigt man z. B. die Correction wegen des inneren Druckes bei verticaler Stellung, so können Fehler von mehreren Hunderstel Grad entstehen, welche mehreren Hunderttausendstel des Widerstandes entsprechen. Ebenso

1) Vgl. Pernet, Jaeger, Gumlich, Thermometrische Untersuchungen I, deren Druck in Vorbereitung ist.

2) P. Chappuis, Travaux et Mémoires VI. Die Reduction beträgt

bei 10° - 0,05°	bei 25° - 0,09 <sub>5</sub> °
15° - 0,07	30° - 0,10
20° - 0,08 <sub>5</sub>	

gross ist die Unsicherheit, welche aus den Depressionerscheinungen des Nullpunktes resultirt.<sup>1)</sup>

Die zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten benutzten 5 Quecksilbercopien befanden sich in einem mit Filz bedeckten Holzkasten, der ungefähr 50 Liter Wasser enthielt. Das Thermometer steckte in den mit Petroleum gefüllten Kästen (K, Fig. 2). Die Messungen wurden bei steigenden und fallenden Temperaturen vorgenommen, während durch Umrühren des Wasserbades für die Gleichmässigkeit der Temperatur gesorgt war.

Bei der Vergleichung von Quecksilberwiderständen wurde stets darauf Rücksicht genommen, dass die durch stärkere Ströme erzeugte Wärme grosse Fehler verursachen kann. Nach Schliessung des Stromes wächst die Temperatur des Quecksilbers zunächst sehr rasch, um sich nach einiger Zeit einem bestimmten Endzustande zu nähern, der durch die Dimensionen des Rohres und durch den Wärmeleitungscoefficient des Glases bestimmt ist.<sup>2)</sup> Diese Endtemperatur ist bei

1) Bei den bis vor kurzem allein gebräuchlichen Thermometern aus Thüringer Glas kann diese Unsicherheit den zehnfachen Betrag, also mehrere Zehntausendstel des Widerstandes betragen. Bringt man aber alle Correctionen an individuell untersuchten Thermometern an, so stimmen die Angaben derselben immer bis auf wenige Tausendstel Grad überein. In der Nähe der Zimmertemperatur lassen sich schon in einem grösseren Becherglas sehr gute Vergleichungen anstellen. Z. B. wurden die hier verwendeten Thermometer 116 und 120 in dieser Weise bei 14,8° und 17,6° verglichen; es fand sich:

n° 116		n° 120	
Ableitung	reducirt	Ableitung	reducirt
15,137	14,774°	15,197	14,779°
17,991	17,641°	18,052	17,641°

2) Der innere Radius des Rohres sei  $r$ , der äussere  $R$ ;  $A$  die Endtemperatur des Quecksilbers nach Erreichung des Gleichgewichtszustandes,  $B$  die Temperatur der Umgebung des Rohres. Aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \Delta \vartheta$$

folgt, da hier  $\partial \vartheta / \partial t$  gleich Null ist

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} = 0,$$

und  $\vartheta = b - a \log \rho$ , wo

demselben Rohr der in der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge, also dem Quadrat der Stromstärke proportional.

Bei 0,5 Ampère würde sich das Quecksilber in einem Rohr von den angegebenen Dimensionen schon um 0,3 Grad erwärmen; aus diesem Grunde ist es nöthig, mit Strömen von wenigen Hundertel Ampère zu arbeiten, bei stärkeren Strömen aber längere Zeit zu schliessen und die Enderwärmung in Rechnung zu ziehen. Für 0,1 Ampère würde diese Correction aber schon zu unsicher ausfallen. Erwärmte man z. B. die Quecksilbersäule durch den Strom um 0,08 Grad, so blieben davon nach 25 Minuten immer noch einige Tausendstel Grad übrig, während nach 5 Minuten erst die Hälfte der Erwärmung verschwunden war. Dieser langsame Ausgleich bei kleinen Temperaturunterschieden muss daher bei nicht ganz constanten Bädern, durch das Zurückbleiben der Temperatur des Quecksilbers, unter Umständen beträchtliche Fehler herbeiführen.

Als Vergleichswiderstand diente einer der p. 518 erwähnten Manganinwiderstände ( $n^o$  148), welcher sich stets in einem Petroleumbade von Lufttemperatur befand. In der folgenden Tabelle sind die Ende August und Anfang September 1892 ausgeführten Messungen der Widerstände  $W$  der Copien zwischen den Temperaturen  $14,6^o$  und  $28,2^o$  angegeben. Ausserdem sind die Werthe  $W_0$  bei  $0^o$  beigelegt, so wie das Verhältniss von  $W/W_0$ .

$$a = \frac{A - B}{\log R - \log r} \quad \text{und} \quad b = \frac{A \log R - B \log r}{\log R - \log r}.$$

Die in der Zeiteinheit für die Längeneinheit entwickelte Wärmemenge ist

$$M = -kq \frac{\partial \theta}{\partial q},$$

daraus folgt

$$k = \frac{M}{2\pi(A - B)} \log \frac{R}{r}.$$

Ein Versuch ergab bei 0,15 Ampère eine durch Widerstandsänderung gemessene Temperaturerhöhung von  $0,03^o$ . Da der äussere Durchmesser 6,8 mm, der innere 0,975 mm betrug, so findet man für Jenaer Glas:

$$k = 0,07.$$

## Beobachtungen.

NB. Die Beobachtungen zwischen 18 und 24° haben doppeltes Gewicht erhalten.

Copie Nr.	Temperatur		$W$	$W: W_0$		$v$
	Les. Nr. 120	Red. a. H		Beobacht	Ber. (Formel I)	
115	16,80	16,31	1,00775	1,01455	1,01460	} Steig. Fall. - 1 - 1 0 + 2
111	16,88	16,39	1,01970	1,01466	1,01467 <sub>s</sub>	
111	16,75	16,26	1,01959	1,01455	1,01456	
115	16,72	16,23	1,00771	1,01451	1,01453	
115	28,70	28,25	1,01877	1,02564	1,02571	- 1
111	28,68	28,23	1,03072	1,02562 <sub>s</sub>	1,02569	- 4
100	28,59	28,14	1,02907	1,02560	1,02561	- 1
115	28,53	28,08	1,01861	1,02548	1,02555 <sub>s</sub>	- 2
115	23,93	23,46	1,01433	1,02117	1,02121	0
111	23,92	23,45	1,02628	1,02120 <sub>s</sub>	1,02120	+ 1
100	23,92	23,45	1,02468	1,02123	1,02120	+ 3
100	23,70	23,23	1,02448	1,02103	1,02099 <sub>s</sub>	+ 4
111	23,70	23,23	1,02607	1,02100	1,02099 <sub>s</sub>	+ 2
115	23,70	23,23	1,01412	1,02096	1,02099 <sub>s</sub>	+ 1
100	15,11 <sub>s</sub>	14,62	1,01648	1,01306	1,01306	0
114	15,16 <sub>s</sub>	14,68	1,00794	1,01309	1,01311 <sub>s</sub>	- 3
118	15,30 <sub>s</sub>	14,82	1,01154	1,01319	1,01324	- 2
118	16,80	16,31	1,01285	1,01450 <sub>s</sub>	1,01460	- 8
100	16,78	16,29	1,01797	1,01454	1,01458 <sub>s</sub>	- 4
114	16,78	16,29	1,00941	1,01457 <sub>s</sub>	1,01458 <sub>s</sub>	- 2
111	16,82	16,33	1,01962	1,01458	1,01462	- 3
111	19,95	19,46	1,02254	1,01748	1,01750	- 1
100	19,96	19,47	1,02092	1,01748	1,01751	- 3
118	19,98	19,49	1,01586	1,01752	1,01752 <sub>s</sub>	+ 3
114	19,99	19,50	1,01238	1,01756	1,01753 <sub>s</sub>	+ 2

## Werthe bei Null Grad.

NB. Diese Werthe besitzen zunächst nur relative Bedeutung.

Nr.	$W_0$
100	1,00338
111	1,00497
114	0,99491
115	0,99330
118	0,99837

Die Beobachtungen bei 20° und bei 23° haben das doppelte Gewicht erhalten, weil sie in der Temperatur der Umgebung angestellt wurden, und die Thermometer mehrere Stunden lang auf wenige Hunderstel constant blieben.

Da bei der Reduction von Messungen mit Quecksilberwiderständen kaum höhere Temperaturen als die hier beobachteten in Betracht kommen dürften und ausserdem die Bestimmung des Temperaturcoefficienten bei höherer Temperatur complicirte Einrichtungen erforderlich gemacht hätten, die nicht in der Absicht der Reichsanstalt lagen, so sah man von einer weiteren Ausdehnung der Versuche ab.

Die aus den Beobachtungen sich ergebenden Grössen  $\alpha + \beta t$  der Formel  $1 + \alpha t + \beta t^2$  sind für die einzelnen Copien graphisch ausgeglichen, und daraus die Mittelwerthe in der Weise abgeleitet worden, dass die Beobachtungen bei den zuverlässigsten Temperaturen am besten dargestellt werden. Die vorletzte Spalte enthält die aus der so abgeleiteten Formel

$$(I) \quad w_t = w_0 [1 + 0,000\,875\,t + 0,000\,001\,25\,t^2]$$

berechneten Werthe. Sie dient zur Reduction von Quecksilberwiderständen in Jenaer Glas, welche bis zu  $28^\circ$  der Wasserstoffscala beobachtet sind, auf Null Grad. Die nach Formel (I) berechneten Werthe  $w_t : w_0$  (relative Widerstandsänderung von Quecksilber in Jenaer Glas) von  $15^\circ$  bis  $26^\circ$  sind in folgender Tafel zusammengestellt.

Temp. H-Scala	$w_t : w_0$	Temp. H-Scala	$w_t : w_0$
15°	1,01340 <sub>5</sub>	21°	1,01892 <sub>5</sub>
16	1,01432	22	1,01985 <sub>5</sub>
17	1,01523 <sub>5</sub>	23	1,02078 <sub>5</sub>
18	1,01615 <sub>5</sub>	24	1,02172
19	1,01707 <sub>5</sub>	25	1,02265 <sub>5</sub>
20	1,01800	26	1,02359

Da die Ausdehnungcoefficienten des Jenaer Glases XVIII und des Tonnelot'schen Glases (verre dure) sehr nahe übereinstimmen, so gilt die Tafel auch für das letztere Glas fast vollständig.

Es ist bemerkenswerth, dass die einzelnen Copien offenbare Verschiedenheiten im Temperaturcoefficienten zeigen, welche die Beobachtungsfehler wesentlich überschreiten. Es

sind daher auch die folgenden Formeln graphisch aufgestellt worden <sup>1)</sup>:

$$\text{für } n^{\circ} 100 \dots w_t : w_0 = 1 + 10^{-6} \cdot 875 t + 10^{-6} \cdot 1,25 t^2$$

$$,, \quad n^{\circ} 111 \dots w_t : w_0 = 1 + 10^{-6} \cdot 875 t + 10^{-6} \cdot 1,22 t^2$$

$$,, \quad n^{\circ} 114 \dots w_t : w_0 = 1 + 10^{-6} \cdot 875 t + 10^{-6} \cdot 1,28 t^2$$

$$,, \quad n^{\circ} 115 \dots w_t : w_0 = 1 + 10^{-6} \cdot 873 t + 10^{-6} \cdot 1,25 t^2$$

$$,, \quad n^{\circ} 118 \dots w_t : w_0 = 1 + 10^{-6} \cdot 873 t + 10^{-6} \cdot 1,28 t^2$$

Die Abweichungen der Beobachtungen gegen diese Formeln sind in der letzten Spalte der Tafel p. 525 angegeben.

Um die wahre Aenderung des specifischen Widerstandes von Quecksilber zu erhalten, muss man den linearen Ausdehnungcoefficient des Jenaer Glases (bezogen auf die *H*-Scala).

$$1 + 10^{-6} \cdot 7,7 t + 10^{-6} \cdot 0,004 t^2$$

berücksichtigen, wodurch sich ergibt

$$(II) \quad w'_t = w^0 [1 + 0,000 882 t + 0,000 001 26 t^2].$$

Eine Zusammenstellung der älteren Beobachtungen findet sich bei Guillaume <sup>3)</sup> und auch bei Salvioni <sup>4)</sup>, eine graphische Darstellung der Abweichungen des Werthes  $w_t : w_0$  verschiedener Beobachter von dem der Reichsanstalt gibt Fig. 9.

Die gute Uebereinstimmung mit Benoît und besonders mit Guillaume dürfte hauptsächlich auf die vollkommene Gleichheit der Temperaturscalen zurückzuführen sein.

Im Folgenden sind die Werthe von  $\alpha + \beta t$  und von  $w_t / w_0$  nach Formel (II) mit denen zusammengestellt, welche sich aus dem Mittel der beiden entsprechenden Formeln von Guillaume

$$w_t = w_0 (1 + 0,000 8881 t + 0,000 001 010 t^2)$$

ergeben.

1) Aus den mitgetheilten Beobachtungen scheint hervorzugehen, dass die zweigliedrige Formel nicht genügt. Die dreigliedrige Formel

$$1 + 10^{-6} \cdot 872 t + 10^{-6} (1,41 - 0,003 t) t^2$$

würde die Beobachtungen besser darstellen.

2) Vgl. M. Thiesen u. K. Scheel, Zeitschr. f. Instr. 12. p. 295. 1892.

3) Guillaume, Rapport sur l'étude des étalons mercuriels de résistance électrique. Proc. verb. du Compt. rend. 115. 1892.

4) Salvioni, Nuovi Confronti fra il mio Ohm legale etc. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.

Grad	$\alpha + \beta t$		$w_t' / w_0$	
	P. T. R.	Guillaume	P. T. R.	Guillaume
0	0,000 882 <sub>5</sub>	0,000 888	1,000 00	1,000 00
5	889	893	4 44 <sub>5</sub>	4 46 <sub>5</sub>
10	895 <sub>5</sub>	898	8 95 <sub>5</sub>	8 98
15	901 <sub>5</sub>	903	13 52 <sub>5</sub>	13 55
20	908	908 <sub>5</sub>	18 16	18 16 <sub>5</sub>
25	914	913 <sub>5</sub>	22 85 <sub>5</sub>	22 83 <sub>5</sub>
30	920 <sub>5</sub>	918 <sub>5</sub>	27 61 <sub>5</sub>	27 55

Die Abweichungen zwischen den Resultaten der beiden, mit vollkommen verschiedenen Methoden und Apparaten geführten Untersuchungen übersteigen die Beobachtungsfehler nicht wesentlich, denn sie bleiben zwischen 0° und 25° unterhalb 0,000 03 Ohm.

Da die einzelnen Copien Unterschiede im Temperaturcoefficienten zeigten, und es möglich wäre, dass ein gerades Rohr andere Resultate gibt, so wurde auch mit einem geraden Normalrohr eine Messung bei 15° ausgeführt, welche bis auf 0,000 01 Ohm mit den Resultaten der Formel (I) übereinstimmte.

Widerstand bei 14,96° 1,01 089

„ „ 0° 0,99 756<sub>5</sub>

$w_t : w_0 = 1,01 336$ , während Formel (I) 1,01 337 ergibt.



## II. Ueber Electricitätserregung bei Reibung von Gasen an Metallen; von K. Wesendonck.

(Hierzu Taf. VII B. Fig. 1—23.)

Die Frage, ob Gase und Dämpfe bei Reibung an festen Körpern und speciell Metall electricisch geladen werden, bietet sich bei Untersuchungen über die Quellen der Electricität von selbst dar, sie hat aber durch ihre Beziehungen zu anderen interessanten Versuchen und Problemen noch ein besonderes Interesse. Einmal liegt es nahe, bei der Entstehung der Luftpolelectricität an Gasreibung als eine der mitwirkenden Ursachen zu denken, ferner hat man gewisse Erscheinungen, die beim Uebertritt von Electricität aus Electroden in Gase<sup>1)</sup> und bei der Ausbreitung derselben an der Oberfläche von Isolatoren sich zeigen, damit in Zusammenhang gebracht. Dann aber ist es besonders die Annahme mancher Forscher, zwischen Gasen und Metallen fände eine Contacterregung statt, die hier in Betracht kommt; denn bei dem heutigen Stande der Dinge ist es wohl kaum zweifelhaft, dass die Berührungs- und Reibungselectricität einer gemeinsamen Ursache ihre Entstehung verdanken; sind doch die weit höheren Spannungen, welche in letzterem Falle auftreten, von Hrn. v. Helmholtz in vollständig plausibler Weise erklärt worden.<sup>2)</sup> Findet daher bei der Berührung von Gasen mit festen Substanzen, insbesondere mit Metallen, Electricitätserregung statt, so ist mit Bestimmtheit auch das Auftreten von Ladungen infolge von Reibung zu erwarten und zwar unter Umständen recht merkliche Spannungen, wenn man die gewöhnlichen durch Metallcontacte hervorgerufenen Potentialunterschiede als durch Einwirkung der umgebenden Gase wesentlich bedingt ansieht. Die Höhe der Ladung, welche ein Reiber erhalten kann, ist bis zu einem gewissen Grade von den äusseren Umständen unabhängig, indem, wenn der Reiber stets über frische noch

1) Vgl. L. Lehmann, Mol. Phys. 2. p. 242 ff.

2) v. Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 342. 1879.

nicht geladene Strecken des Reibzeuges hingeführt wird, ein bestimmtes Maximum der Spannung endlich stets eintritt. Dies Maximum ist das höchste erreichbare; wird der Reiber *cet. par.* bei seiner Bewegung nicht immer über neue noch unelectrische Stellen fortgeschoben, so treten schliesslich geringere maximale Ladungen auf. Bedenkt man, dass bei blossen Contact von Metall und Nichtleitern nur sehr schwache Ladungen erzielt werden <sup>1)</sup> trotzdem aber Reibung leicht zu Ladungen führt, die mit den grössten Electroskopen nachweisbar sind, so könnte man also bei Verwendung feinerer Instrumente auch bei Gasen ganz entschiedene Effecte erwarten, wenn es z. B. gelänge, solche in neutralem Zustande und in genügender Menge gegen ein isolirtes Metallstück, wie an demselben vorbei mit geeigneter Heftigkeit strömen zu lassen.

Versuche Gasreibung an Metallen als Electricitätsquelle nachzuweisen, sind schon vor langer Zeit angestellt worden, meines Wissens alle mit negativem Erfolge, <sup>2)</sup> während man allerdings bei einigen Isolatoren zu anderen Ergebnissen kam. *Ärmstrong* <sup>3)</sup> legte sich die Frage vor, ob comprimirt Luft ebenso wie Dampf beim Ausströmen Electricität erregen könne. Zu acht Atmosphären in einem etwa sechs Quart fassenden Kessel verdichtet und durch eine Glasröhre ins Freie tretend, ergab Luft erhebliche Ladung des isolirten Kessels, selbst Funken bis zu  $\frac{1}{8}$  Zoll Länge konnten erhalten werden. Aber Stärke und sogar Vorzeichen der Electrification waren zu Zeiten schwankend, Kälte und Feuchtigkeit begünstigten das Auftreten von Ladungen, bei *heissem trockenem* Kessel traten *keine mehr auf*; dagegen in fast unveränderter Stärke nachdem kaustisches Kali in den Kessel eingeführt worden, und darin längere Zeit verweilt hatte. Es war stets nöthig, den Ausströmungscanal möglichst plötzlich zu öffnen. Bei mildem feuchtem Wetter fand sich der isolirte Kessel regelmässig negativ, bei abgeleitetem wurde dann der Luftstrom positiv. Eine bestimmte Erklärung dieser Phänomene gab *Ärmstrong* nicht. Genauere Einsicht in die betreffenden Erscheinungen ver-

1) Wiedemann, *Electr.* 1. p. 211.

2) Vgl. Riess, *Reib.-Electr.* 2. p. 399.

3) *Ärmstrong*, *Phil. Mag.* 18. p. 133 u. 329. 1841.

danken wir vielmehr erst Faraday<sup>1)</sup>, der ebenfalls bei Gelegenheit seiner so berühmt gewordenen Untersuchungen über Dampfelectricität unser Thema bearbeitete. Er hat bekanntlich gefunden, dass von Flüssigkeitströpfchen freier reiner Wasserdampf electromotorisch ganz unwirksam ist, während bekanntlich sehr energische Ladungen auftreten, sobald Wassertheilchen sich dem Dampfe beimengen. Ganz ähnlich erwies sich in einer sorgtätig gereinigten Kupferbüchse von 46 englischen Kubikzoll Inhalt *verdichtete und getrocknete Luft als völlig unfähig*, beim Ausströmen aus dem Compressionsgefäße kleinen in den Strahl gehaltenen Kegeln aus Metall oder diversen sonstigen starren Substanzen *eine nachweisbare Ladung zu ertheilen*. Eine solche zeigte sich aber sofort, wenn beim Entspannen der Luft infolge adiabatischer Abkühlung *Nebelbildung eintrat*. Die Menge der zu den Versuchen verwendeten Luft war allerdings verhältnissmässig gering, jedesmal etwa 150 englische Kubikzoll.<sup>2)</sup> Auch die Messinstrumente, welche Faraday zu Gebote standen, erscheinen im Vergleiche zu der heute gebräuchlichen als nur wenig empfindlich. Aus den betreffenden Versuchen ist daher wohl zu schliessen, *dass bei Friction trockene Luft verglichen mit Flüssigkeitströpfchen und Pulver nur wenig wirksam ist*; aber keineswegs erschien eine Wiederholung der Experimente mit verbesserten Hilfsmitteln als überflüssig. Faraday hat seine Luft augenscheinlich nicht filtrirt, auch bemerkte er, dass es schwierig gewesen, den vom Compressionsgeruche herrührenden Oelgeruch völlig zu entfernen, es ist aber fast mit Sicherheit zu erwarten, dass in Gasen suspendirte Staubtheilchen bei Reibung etwas Electricität erregen. In der That<sup>3)</sup> hat denn auch Hr. Sohnke<sup>4)</sup> bei Anwendung eines Thomson'schen Electrometers nachgewiesen, dass Luft durch einen Blasebalg

1) Faraday, Experiment. Res. 2. p. 110. §§ 2130 u. 2132. Uebersetzung von Kalischer.

2) Nicht ganz  $2\frac{1}{2}$  Liter.

3) Bei Armstrong's Versuchen ist nicht mehr sicher festzustellen, was bei seiner getrockneten Luft wirksam war, während trockene erhitzte Luft ganz ohne Wirkung blieb, seine Electroscopie waren auch nur wenig empfindlich im Vergleich zu den neueren Instrumenten.

4) Sohnke, Wied. Ann. 28. p. 559. 1886.

mit Heftigkeit gegen ein rauhes Kupferstück getrieben, dem Metalle *negative* Ladung verlieh. Hr. Sohnke entscheidet nicht, ob dieser Erfolg allein von den Staubtheilchen herrühre, obwohl ihm dies wahrscheinlich erscheint, da er keine Versuche mit filtrirter Luft anzustellen Gelegenheit hatte. Benutzung eines Blasebalges scheint übrigens Verfasser von Bedenken nicht ganz frei. Durch die Bewegung der Theile desselben kann nämlich leicht Reibelectricität erzeugt werden, die sich auf die Staubtheilchen der Luft überträgt, besonders wenn Partikelchen, die dem Blasebalge anhaften, losgerissen und von dem Luftstrome mitgeführt werden.

Hr. Spring<sup>1)</sup> hat einen Versuch beschrieben, bei welchem trockene Luft durch eine zwei Millimeter weite Messingröhre (allerdings innerhalb einer feuchten Atmosphäre) gegen den auf etwa 70 bis 80 Grad erwärmten Messingknopf eines Goldblattelektroskopes getrieben wurde. Es zeigt sich dabei eine starke Divergenz der Goldblättchen freilich von wenig constantem Charakter. Hr. Spring glaubt dieses Resultat auf Rechnung des Erwärmens setzen zu sollen; dadurch sei die dem Metalle adhärende Gasschicht entfernt und so der bewegten Luft die Möglichkeit gewährt worden, sich direct an dem Metalle selbst zu reiben. Faraday's negatives Resultat erkläre sich aus dem Umstande, dass bei seinen Versuchen die Luft nur mit der adsorbirten Hülle in Berührung gekommen, also eigentlich Reibung von Luft an Luft stattgefunden habe, die begreiflicher Weise zu keiner Electricität führte. Die Hrn. Elster<sup>2)</sup> und Geitel haben indessen bei einer Wiederholung des Spring'schen Experimentes seine Angaben durchaus nicht bestätigt gefunden. Eine Erwärmung, wie sie der belgische Forscher anwandte, erwies sich als völlig unwirksam. Auch dürfte von vornherein feststehen, dass eine solche Erhitzung durchaus nicht im Stande ist, die adsorbirten Gasschichten einigermaassen vollständig zu entfernen. Mit Recht erklärt daher wohl Hr. Sohnke<sup>3)</sup> das Spring'sche Resultat als durch Wasserreibung bedingt, indem der Luft-

1) Spring, Bull de l'Acad. Belg. (3) 7. pag. 6. 1882.

2) Elster, Wied. Ann. 19. p. 608. Ann. 1883.

3) Sohnke, Ursprung der Gewitterelectr. p. 48. 1885. Fischer's Verlag. Jena.

strom, bei seiner Ausdehnung sich abkühlend, Condensation veranlasste, welche der Beobachtung des Hrn. Spring entging.

Weiter hierher gehörige Forschungen sind Verfasser nicht bekannt geworden und erlaubt derselbe sich daher nunmehr über eine Reihe eigener einschlägiger Versuche näher zu berichten. Einige vorläufige Mittheilungen über das vorliegende Thema sind bereits erschienen (Naturwiss. Rundsch. VI. p. 453 und VII. p. 29 und p. 225).

Der Umstand, dass comprimirte Gase von der Industrie in grösserem Maassstabe in den Handel gebracht werden, erleichtert gegenwärtig die Anstellung von Untersuchungen, wie sie hier in Betracht kommen, erheblich, indem man über grosse Gasmengen unter hohem Drucke verfügen, und also stärkere und länger andauernde Reibungen bewirken kann, als dies Faraday seiner Zeit möglich gewesen. Man besitzt auch jetzt treffliche sichere und vollkommen dicht schliessende Compressionsgefässe, welche ein gefahrloses Arbeiten trotz sehr hoher Drucke gestatten und in denen man ohne Verlust die eingepressten Gase bis zu geeigneter Versuchszeit aufbewahren kann. In Betracht kommen hier zwei Berliner Firmen, nämlich die Actiengesellschaft für Kohlensäureindustrie<sup>1)</sup> und die Elkan'sche Fabrik für comprimirten Sauerstoff.<sup>2)</sup> Erstere liefert, wie bekannt, verflüssigtes sehr reines Kohlendioxyd in cylindrischen Eisengefässen<sup>3)</sup>, Taf. VII B Fig. 1, deren grösste 8 kg liquiden Inhaltes fassen. Das Abschliessen und Oeffnen erfolgt durch eine aussen (bei *c*) mit Rad versehene Verschlussvorrichtung, welche einen Ebonitpfropf (*c*, Taf. VII B Fig. 2) gegen die Mündung (*a*) presst und sie so sicher verschliesst. Durch Nachlassen der Schrauben kann man die Kohlensäure nach Belieben in mehr oder minder schnelle Strömung versetzen. Der Austritt des Gases erfolgt durch die Kammer (*d*) und den kurzen Ansatz (*e*, beide aus Messing); in dessen innerlich weiteren Theile (*i*) man das verdickte Ende ( $\beta$ , Fig. 3) eines sogenannten Nippels aus Messing einsetzen und mittels der Mutter ( $\alpha$ ) festpressen kann. Hierzu ist aussen an *e* (Fig. 2) ein Ge-

1) Berlin, Lindenstr. 20/21.

2) Berlin, Tegelerstr. 15.

3) Diese sollen fortan kurz Actiengefässe heissen.

winde eingeschnitten. Hr. Dr. Elkan liefert bis zu 100 Atmosphären verdichteten Sauerstoff in Stahlbomben (Fig. 4) bei denen man ebenfalls einen Nippel vollkommen dicht mittels Differentialschraube anzubringen vermag. Fig. 5 zeigt die Verschluss- und Ausströmungstheile im Durchschnitt. Bei *k* ist über dem konisch gearbeiteten Theile des Messingaufsatzes *AB* Fig. 4 ein Gewinde eingeschnitten, in das ein entsprechendes (*g*, Fig. 6) aussen an der Mutter *f* des Nippels angebrachtes passt. Im Innern verschraubt sich die Mutter mit einem Gewinde, das an der Ausströmungsröhre des Nippels vorhanden ist. So gelingt es, indem man erst *g* Fig. 6 in *k* Fig. 5 einschraubt, dann ebenso das Nippelrohr bis es dem konischen Theil bei *m* Fig. 5 aufsitzt, und dann die Mutter *f* fest anzieht<sup>1)</sup>, einen luftdichten Abschluss zu erzielen, sodass alles Gas durch den Nippel hindurch seinen Ausweg finden muss, falls überhaupt die Bombe geöffnet ist. Der Verschluss der Bombe erfolgt durch eine vorn etwas zugespitzte Stahlspindel, die bei *xxx* Fig. 5, ein Gewinde trägt und sich mittels eines Schlüssels (Fig. 7) so weit einschrauben lässt, dass bei *y* ein vollständiger Verschluss des Gaskanals *zzyu* erfolgt durch Anpressen von reinem Metall an reines Metall. Bei sorgfältigem Aufdrehen kann man die Geschwindigkeit des austretenden Gasstromes innerhalb weiter Grenzen verändern und recht genau reguliren. Die Compressionspumpe arbeitet ohne Fett, indem die Kolbendichtung ohne Anwendung von Schmiermitteln geschieht (bis in die neueste Zeit mittels rein metallischer Packung, dann auch durch fettfreie Ledereinlagen)<sup>2)</sup>. Der Sauerstoff wird entwickelt, indem Bariumoxyd zuerst bei niederer Temperatur mit Luft, welche ein Wattefilter und Hürden mit Aetzkalk und Aetznatron zum Zwecke des Trocknens passirt hat, in Berührung kommt, und dann der Glühhitze ausgesetzt wird. Hr. Elkan übernahm es auch, Luft zu comprimiren, indem er den Sauerstoffgenerator ausschalten, sonst

1) Durch Klopfen auf die Flügel *op* kann man recht fest anschrauben. Der Conus am Nippel ist etwas abgerundet und berührt bei *m* Fig. 5 nur linear reines Metall gegen reines Metall gepresst, was sehr dicht hält.

2) Ebenso ist die Stahlspindel fettfrei und wird stets vor dem Einführen in die Bombe noch mit Schmirgel blank geputzt.



aber das Verdichten in gleicher Weise vornehmen liess. Luft und Sauerstoff können so zu 100 Atmosphären zusammenge-  
drückt in kleineren 500 Liter fassenden, oder in grösseren  
1000 Liter fassenden Stahlbomben geliefert werden. Fraglich  
ist allerdings zunächst, inwieweit es gelingt, genügende Rein-  
heit in Bezug auf Staub und Feuchtigkeit zu erzielen, welche  
beide Dinge ja voraussichtlich sehr leicht Veranlassung zu  
Electricitätsbildung geben konnten. Der Sauerstoff selbst ist  
nach den Analysen des Hrn. Hempel recht rein. Leider  
sammelt sich in den Bomben ein bräunlicher Staub an, der  
natürlich von den ausströmenden Gasen leicht mitgerissen wird.  
Um die Reinigung vorzunehmen, muss man den Aufsatz aus  
Messing *AB* Fig. 4 auslöthen und nach geschehenem Auswischen  
und eventuellen Waschen und Trockenglühen der Bombe wieder an-  
löthen was nicht wenig mühsame Operationen verlangt, da ja  
alles sehr dicht und fest sein muss. Es empfahl sich daher, die  
Gelegenheit zu benutzen, wenn ganz neue, bisher noch nicht  
gefüllte Bomben, die jedenfalls zu reinigen und zu trocknen  
sind, in Gebrauch gestellt wurden. Auch trug Hr. Elkan  
Sorge, die der Luft ausgesetzten Theile durch Zubinden mög-  
lichst vor Staub und Feuchtigkeit zu schützen. Ferner wurde  
vor jedem Versuche mit einer frischgefüllten Bombe die  
konische Vertiefung des Aufsatzes *AB* bis zur Stahlspindel  
sorgfältig ausgewischt und dann etwas Gas mit Heftigkeit in  
die freie Atmosphäre ausströmen gelassen. Dies fegte die  
Ausströmungskanäle von eventuell darin befindlichen Partikel-  
chen frei. Man sah fast immer, gegen das Licht blickend,  
eine Staubwolke aus der Bombe hervorschiessen, die aber bei  
der zweiten und dritten Wiederholung fast regelmässig ver-  
schwand. Alsdann wurde der ebenfalls ausgewischte, inner-  
lich blanke Nippel aufgeschraubt und die Bombe mit den  
Apparaten verbunden, an denen die Gasreibung eintreten sollte.  
Als solche dienten zunächst kleine Becherchen, ca. 35 mm lang,  
die Mündung ca. 30 mm weit, welche einfach durch Einpressen  
von dünnem Messingblech in eine runde hölzerne Hohlform  
erhalten wurden. Um die Reibung zu vermehren wurde auch  
wohl ein Stück Messingdrahtnetz zugleich mitgepresst, sodass  
es das Innere des Becherchens auskleidete. Einen an dieses  
angelötheten Messingdraht kittete man auf ein cylindrisches



Glasgefäß ( $u$ , Fig. 8), an dessen Rand zur weiteren Fixirung man auch noch das Becherchen selbst mit Wachs anklebte. In das Innere des Becherchen wurde dann die Ausströmungsröhre des Nippels eingeführt, sodass die Gase beim Ausfliessen die Luft aus dem Innern verdrängen und sich am Boden, wie an den Seitenwänden reiben mussten (vgl. Fig. 9). Der Messingdraht führte zu einer gleich zu beschreibenden Wippe und mittels dieser zum Electrometer. Das durch die Glaszylinder isolirte Becherchen befand sich bei den Versuchen entweder in dem gleich zu erwähnenden Schutzkasten, oder in einem besonderen Blechkasten, aus dem dann der Draht  $\alpha$  (Fig. 10) durch ein in die Oeffnung  $\beta$  eingekittetes Glasröhrchen isolirt heraustrat. Statt des Becherchens verwandte man später einen dem von Faraday benutzten nachgebildeten Kegelapparat (Fig. 11). Ein zweimal umgebogener Glasstab  $ABC$  ist in einem Holzklötzchen bei  $C$  eingekittet, das seinerseits wieder am Boden des würfelförmigen (etwa 23 cm Seitenlänge) Blechkasten  $EFGH$  angekittet ist. Bei  $B$  ist mittels einer Messinghülse  $a$  das Messingrohr  $a$  aufgekittet, das einerseits sich zu einer Hülse  $bcd$  erweitert, andererseits in einen Messingtrichter  $DE$  übergeht. Die Hülse steckt bis zu  $dc$  in der Durchbohrung eines grossen (4 cm Durchm.) Gummipfropfens  $kijk$ , der wiederum in einen ringförmigen Ansatz an dem Blechkasten eingeschoben ist. Bei  $\delta$  ist ein Draht  $\delta\delta$  angelöthet, der zur Ableitung des Trichters der Röhre  $a$  und der Hülse dient. In letztere hinein geht der Gummipfropf  $pq$ , der über die Ausflussröhre des Nippels  $fg$  geschoben ist (bei  $g$  liegt die Mündung). Das Ende  $A$  des Glasstabes trägt mittels einer aufgekitteten Hülse  $\beta$  ein cylindrisches Messingstück  $s$  in dessen Durchbohrung ein Gewinde eingeschnitten ist, das als Mutter für eine theilweise ebenfalls mit Gewinde versehene Spindel  $rt$  dient. Diese trägt vorn einen Hohlkegel aus Messing  $KK$  von etwa 33 mm Seitenlänge und nahe gleichem Durchmesser, welcher dem Trichter gegenübersteht, und sich durch Drehen der Spindel in die Oeffnung des Trichters hineinschrauben lässt, bis er in diesem festsitzt.<sup>1)</sup>  $l$  ist eine kleine Scheibe, die das Drehen der Spindel erleichtert. Ein starker

1) Die Verschiebung beträgt im Ganzen etwa 24 mm.

kupferner Draht  $uv$  ist an  $l$  central angelöthet und tritt durch das Glasröhrchen <sup>1)</sup>  $r\sigma$  isolirt aus dem Kasten heraus. Ein biegsamer dünner Messingdraht  $\zeta$ , bei  $v$  angelöthet, führt dann über die schon früher erwähnte Wippe zum Electrometer. Der Blechkasten ist durch einen Deckel, den man noch mit Wachskitt und Guttaperchapapier dichtete, fest verschlossen.  $R$  ist eine mit Ringansatz versehene Oeffnung (4 cm weit) im Deckel zum Auslassen der Gase und eventuellen Hineinsehen dienend, gewöhnlich mit einem Gummipfropfen verschlossen oder auch wohl mit einem durchbohrten solchen mit eingesteckter Chlorecalciumröhre (Fig. 12). <sup>2)</sup>

Der Draht  $\zeta$ , resp. der Draht des Becherchens führte, wenn nöthig, von Siegellackstützen getragen, durch eine seitliche Oeffnung in einen, aus mit Stanniol beklebten Pappwänden, gebildeten Kasten hinein, als dessen Decke ein eisernes verzinktes Drahtnetz diente, während er vorn durch zwei Vorhänge aus Stanniol verschlossen werden konnte. Innerhalb des Kastens lag die Mündung einer langen Zinkröhre ( $AB$  Fig. 13), durch die ein Kupferdraht zum Electrometer führte. Hierzu war quer über die im Kasten befindliche Mündung derselben eine Siegellackstange gekittet; eine Durchbohrung dieser durchsetzte der Draht, durch eine auf ihm befestigte Klemmschraube am Zurückweichen in die Röhre hinein verhindert. Am anderen Ende stand in Paraffin eingelassen eine kurze, unten zugeschmolzene Quecksilber enthaltende Glasröhre  $a$ , um sie herum war der Kupferdraht bis zur Spannung gewunden und verdrillt, sein Ende dann in das Quecksilber eingetaucht. Von  $a$  ging ein Draht zu einem  $\gamma$  kleinen Quecksilbergefasschen  $b$ , von diesem dann ein Draht  $\lambda$  zur Klemme  $x$  oben am Electrometer  $E$ . Dieses nach den Angaben von Hrn. v. Helmholtz vom Mechaniker Voss gebaut, war derselben Art, wie das von Hrn. Blake gebrauchte

1) Für gewöhnlich wird das Glasröhrchen aussen bei  $\sigma$  zugekittet, schon um das Eindringen von Feuchtigkeit zu verhindern. Will man den Kegel verstellen, was durch Drehen von  $uv$  von aussen ohne Oeffnen des Blechkastens geschehen kann, so erweicht man mit einer Flamme den Siegellack.

2)  $a$  ist etwas Watte, die das Hineinfallen von staubförmigen Theilchen in den Kasten verhindert.

Instrument, auf dessen Beschreibung ich hiermit verweise.<sup>1)</sup> Dasselbe erwies sich als für die vorliegenden Untersuchungen recht brauchbar<sup>2)</sup> und genügend constant, auch liess sich ihm eine grosse Empfindlichkeit geben. Einiges Nähere darüber ist bei den betreffenden Versuchen angegeben. Durch Temperaturänderungen finden anscheinend leicht Nullpunktverschiebungen von erheblicher Grösse statt; lässt man das Instrument längere Zeit unbenutzt stehen, so erscheint häufig die Scala aus dem Gesichtsfelde verschwunden, indessen gelingt es leicht mittels des Torsionskopfes eine gewünschte genügend constante Einstellung zu erzielen für die Dauer der Versuche. Das Electrometer, wie alle Zuleitungsdrähte, konnten mit metallischen abgeleiteten Schutzhüllen umgeben werden. Die Klemmschraube, die mit dem einen Pole der Zamboni'schen Säulen in Verbindung steht, fasste einen an die Wasserleitung gelötheten Kupferdraht *u*. Der in dem Quadranten spielende Aluminiumflügel, welcher also durch die Electrometereklemmschraube und die Drähte  $\lambda\gamma$  und  $\pi i$  mit dem schon früher genannten Schutzkasten *MNOP* communicirte, konnte mittels einer Wippe<sup>3)</sup> bald zur Erde abgeleitet, bald mit dem isolirten Kegel des Faraday'schen Apparates, resp. den Becherchen verbunden werden.

Die Wippe *I*, Fig. 14, taucht in je vier von sechs in einen Paraffinklotz eingeschnittenen, theilweise mit Quecksilber gefüllten Löchern  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$ , von denen je  $\alpha$  und  $\epsilon$ ,  $\delta$  und  $\gamma$  durch einen Draht verbunden sind. In  $\alpha$  taucht der durch die Zinkröhre *AB* vom Electrometer kommende Leitungsdraht  $\pi i$ ; in  $\beta$  der vom Kegelapparat, resp. Becherchen herrührende  $\zeta$ ;  $\gamma$  ist zur Erde abgeleitet durch einen Draht  $\psi$ , der an den Draht  $\mu\nu$ , welcher von der Schutzröhre *AB* zur Wasserleitung (beiderseits verlöthet) führt, angelöthet ist. An  $\mu\nu$  sitzt eine

1) Blake, Wied. Ann. 19. p. 519. 1883.

2) Zeitweise wurde eine Dämpfung verwendet, indem man an den Spiegel ein Glasstäbchen mit Platinplättchen ankittete und dieses in Schwefelsäure eintauchen liess. Meist waren aber die Schwingungen des Aluminiumflügels, wenn man den Spiegel mit zwei symmetrisch angebrachten Gewichten beschwerte, nur noch wenig störend auch ohne Dämpfung.

3) Wippe *I*, wie sie in Zukunft heissen soll.

Klemmschraube, welche die übrigen Ableitungsdrähte aufnimmt, nämlich vom Blechkasten, in dem der Kegelapparat steht, vom Drahtnetzdach des Schutzkastens, dessen innere Stanniolverkleidung mit der Zinkröhre in Verbindung ist, dann  $\delta$  von der Hülse und dem Trichter des Kegelapparates und endlich einen von der gleich zu erwähnenden Wippe *II* herrührenden Kupferdraht. Die Wippe *I* selbst besteht aus einer starken Glasröhre, in deren jedes Ende die miteinander verlötheten Enden von zwei dicken bügelförmigen Kupferdrähten  $a_1 b_1$ , resp.  $a_2 b_2$  und eines geraden nach abwärts gehenden  $c_1$ , resp.  $c_2$  eingekittet sind. Hat die Wippe die Lage wie in der Figur, so ist der Kegelapparat durch  $\zeta \beta c_1 a_1 \alpha K i$  etc. mit dem Electrometer verbunden und isolirt. Legt man um, sodass  $b_1$  und  $b_2$  in  $\gamma$  und  $\delta$  tauchen, so ist der Kegel über  $\zeta \beta a_1 b_1 \gamma$  und der Aluminiumflügel des Electrometers über  $\alpha \epsilon c_2 b_2 \delta \gamma$  zur Erde abgeleitet. Taucht in  $\varphi$  der Poldraht eines Elementes, so ist bei der ersten Lage der Wippe Kegel wie Electrometer auf das Potential des betreffenden Poles geladen, indem ja  $\varphi$  mit  $\epsilon \alpha$  und  $\beta$  und dadurch mit den Drähten  $\zeta$  und  $K i$  verbunden ist. Legt man um, so ist alles abgeleitet bis auf  $\varphi$ , das dann vollkommen isolirt ohne weitere Verbindung bleibt. Man kann so die Empfindlichkeit des Electrometers prüfen, aber auch die Güte der Isolation, indem man bei der ersten Stellung der Wippe den Poldraht<sup>1)</sup> des Elementes aus  $\varphi$  herausnimmt und zusieht, ob die Einstellung des Electrometers dabei genügend constant bleibt. Berührt man, wenn dies der Fall, alsdann den Kegel im Kasten durch die Oeffnung *R* hindurch ableitend mit einem Draht, so muss die Scala bei einem guten Zustande aller Verbindungen sofort auf die Nullstellung zurückgehen. Sind Glasstützen und Gefässe im Innern des Kastens mit einer Ladung versehen, was sehr leicht absichtslos eintreten kann, so wird beim Umlegen der Wippe aus der Ableitungs- in die Isolirstellung ein Ausschlag erfolgen, den man natürlich zu beachten hat. Bei längerem ruhigen Stehen (ohne Anfassen u. dgl.) der im abgeleiteten Kasten befindlichen Gegenstände verlieren sich deren Ladungen mit der Zeit, aber man muss sich natürlich stets überzeugen, ob kein von ihnen

1) Dazu ist dieser mit Guttapercha überzogen, sodass man ihn isolirt anfassen kann.

herrührender Ausschlag vorhanden ist. Als Element diente ein sogenanntes hohes Daniell, dessen Poldrähte in die Klemmen  $\psi$  und  $\chi$  befestigt, mit den beiden Quecksilbernäpfchen  $\mu$  und  $\nu$  eines Quecksilbercommutators (Fig. 15) verbunden waren. In die Klemme  $\zeta$  wurde der zur Wippe I in die Klemme  $\xi$  der zur Erde geleitete Draht eingebracht. Dann ist je nach der Lage der Wippe II<sup>1)</sup> das Näpfchen  $\varphi$  der Wippe I mit dem positiven oder negativen Pol verbunden (man kann also die Empfindlichkeit durch Ausschläge nach beiden Seiten hin prüfen), während der andere negative, resp. positive Pol des Elementes das Potential der Erde hat. Das Ablesefernrohr nebst Scala stand auf einem dreibeinigen verstellbaren Tische neben dem Pappkasten beinahe drei Meter von dem Electrometer entfernt. An der Glasröhre der Wippe I war ein langer Glasstab angebracht, der durch einen Schlitz in dem als Decke dienenden Drahtnetz aus dem Pappkasten hervorragte und das Umlegen von aussen zu besorgen gestattete.

Zunächst wurde nun versucht, ob ein schwacher Strom aus einer der von Hrn. Elkan gelieferten, mit comprimierter Luft gefüllten Bomben nicht schon Spuren von Ladung hervorruft; dazu stellte man zunächst das Becherchen mit Glasfuss in den grössen, wie oben erwähnt abgeleiteten Pappkasten, brachte die ebenfalls mit der Erde verbundene Bombe<sup>2)</sup> auf einem verstellbaren Tische so an, dass der Nippel durch eine Oeffnung in dem Pappkasten in das Innere des aufgestellten Bechers hineinragte. Waren die Stanniolvorhänge heruntergeklappt, so befand sich das zu ladende isolirte System gegen äussere Einwirkungen vollständig geschützt. Das Electrometer besass zur Zeit dieser Versuche eine Empfindlichkeit von etwas über 400 Scalentheilen für einen Daniell.<sup>3)</sup> Oeffnete man nun, nachdem der Wippe die richtige Stellung gegeben, durch Drehen mit dem Schlüssel langsam und vorsichtig den Ausströmungskanal, sodass ein gleichmässiger Luftstrom sich in das Becherchen ergoss, so trat keine Spur einer entschiedenen

1) Nämlich der Wippe des Quecksilbercommutators.

2) Ein um die blanken Messingtheile der Bombe gewickelter Draht führte zu der oben erwähnten Klemmschraube an  $\mu$   $\nu$ .

3) Scalentheile wollen wir in Zukunft mit  $\mu$  bezeichnen, 60<sup>te</sup> bedeutet also 60 Scalentheile.

Bewegung der Scala ein, selbst wenn das Strömen ca. eine Minute lang anhielt. Es zeigte sich absolute Ruhe oder nur kleine doppelsinnige Schwankungen von ca. einem Scalentheile, wie sie aber auch ohne alle Luftbewegung eintreten. Erst wenn man mit Heftigkeit und unter Brausen die Luft herausströmen liess, erschien ein merklicher Ausschlag, der bei sehr heftigem Strömen, indem man innen mehr mit dem Schlüssel öffnete, bis zum Verschwinden der Scala führen konnte. Lässt man sehr heftig in die freie Atmosphäre ausströmen, so beobachtet man wohl Bildungen von Nebeln, wie mir bereits Hr. Elkan mittheilte, welche ja schon durch die infolge der bedeutenden beinahe adiabatischen Ausdehnung eintretenden Abkühlung aus der umgebenden Atmosphäre niedergeschlagen werden können, auch wenn der Gasstrom selbst keine Feuchtigkeit enthält. Weder in noch an dem Becherchen fand sich indessen auch nur eine Spur von Wasser, ebensowenig war Nebelbildung bei den Versuchen selbst zu beobachten. Immeihin wurde zur grösseren Sicherheit das Becherchen in einen Blechkasten, wie früher erwähnt, eingeführt, dessen Inneres sich austrocknen liess<sup>1)</sup> und den man mit Luft aus der Bombe füllen konnte, sodass also das geriebene Metall mit demselben Gase umgeben war, das auch zur Electricitätserregung dienen sollte. Der Nippel wurde mittels Gummipfropfens möglichst dicht in eine seitliche Oeffnung des abgeleiteten Kastens eingesetzt, bei heftigem Strömen musste natürlich der Pfropfen oben aus dem Deckel entfernt werden. Der Verbindungsdraht zum Pappkasten war noch besonders durch Metallschirme geschützt. Die Resultate bleiben indessen hier wie bei den früheren Versuchen dieselben. Zeigte sich eine Ladung, so war diese in beiden Fällen indessen mit einer gewissen Zweideutigkeit in Betreff des Vorzeichens behaftet, die also bei der Einführung des Becherchens in den Blechkasten nicht gehoben wurde. Bei den Arbeiten im Pappkasten zeigte sich bei zunehmendem Strömen zunächst negative Electricität, dann bei verstärktem Ausströmen erhebliche positive Ausschläge bis zum Verschwinden der Scala. Die Grösse der negativen Ladungen war sehr verschieden, oft zeigte sich nur eine kleine negative Bewegung,

1) Die Oeffnung im Deckel, welche die Fig. 10 zeigt, wurde dann mit einem Gummipfropfen verschlossen.



bevor die entgegengesetzte eintrat.<sup>1)</sup> Als dann das Becherchen in den eigenen Blechkasten gebracht war, zeigten sich bei wiederholten Versuchen nur negative Ladungen, bis über ein Daniell hinaus, und keine positiven, letztere waren nur bei den allerersten Versuchen zu bemerken, sodass man auf den Gedanken kam, noch nicht vollständig erreichtes Austrocknen sei die Ursache davon. Aber spätere Versuche, wo Entfernung der Feuchtigkeit nichts zu wünschen übrig liess, ergaben wieder das frühere Resultat, kleine negative Ausschläge mit darauf folgenden grossen positiven. Nur einmal noch fand sich eine erhebliche negative Ladung, es machte auch keinen erheblichen Unterschied, ob in dem Becherchen Messinggaze sich befand oder nicht. Bei dieser Zweideutigkeit der Versuche liess ich den Kegelapparat construiren, und erhielt damit dann auch befriedigendere Resultate. Kegel und Trichter wurden übrigens in der Folge öfter vom Mechaniker nachpolirt (mit Schmirgel und sogenanntem Wiener Kalk und Alkohol), um stets mit einer blanken und reinen Metallfläche arbeiten zu können. Vermehrung der Reibung durch das Drahtnetz hatte sich ja als nicht wesentlich erwiesen. *Wurde nun der Kegel weit aus dem Trichter herausgeschraubt, so zeigte sich regelmässig negative Ladung, dagegen positive, wenn der Kegel ganz in den Trichter hineingestellt war*, sodass der Luftstrom durch den engen Zwischenraum sich durchzwängen musste; dieser konnte dabei so eng gewählt werden, dass eben kein Contact eintrat, was mit einem kleinen Galvanoskop und Element zu constatiren war, mit dessen Polen Kegel und Trichter verbunden wurden. Uebrigens war die äusserste Enge gar nicht einmal nöthig, um positive Ausschläge zu erhalten. Es sei hier eine Versuchsreihe als Beispiel mitgetheilt, zugleich auch bemerkt, dass, wenn man starke Bewegungen des Electrometers erzielen wollte, leicht eine grosse 1000 Liter enthaltende Bombe in sechs Versuchen geleert wurde. Man verbrauchte also ganz erhebliche Gasmengen, und versteht, warum Faraday bei seinen Versuchen Ladungen nicht nachzuweisen vermochte. Das Electrometer besass übrigens nicht mehr die frühere

1) Vielleicht hängt das von der Schnelligkeit, mit der die Bombe aufgedreht wird, ab.



Empfindlichkeit. Ein neuer Aufhängefaden hatte eingezogen werden müssen, die Ausschläge eines Daniell sollen von jetzt ab gelegentlich bei den einzelnen Versuchen angegeben werden. Am 28. Mai 1891 zeigten sich bei weit abstehendem Kegel dreimal hintereinander starke negative Bewegungen, zuerst von 360 Scalentheilen, während ein Daniell 155 gab, dann bei weiterem Oeffnen verschwand bei zwei folgenden Versuchen die Scala aus dem Gesichtsfelde (Nullpunkt liegt bei 450, bei negativer Bewegung nehmen die Zahlen ab). Jetzt wurde der Kegel möglichst weit in den Trichter hineingeschraubt, alsdann stellte sich zunächst noch ein ziemlicher negativer Ausschlag ein ( $150 \mu$ ), dann aber kehrt die Bewegung um und geht bis weit über die Scala hinaus im positiven Sinne. Das zweite mal tritt nur ein kleiner negativer Ausschlag ein,  $2-3 \mu$  darauf ein positiver von  $530 \mu$ . Hiermit ist die Bombe entleert und eine Versuchsreihe zu Ende. Dass mit nahem Kegel gearbeitet wurde, als die Bombe bereits weiter geleert war, bedingt nicht etwa das Auftreten der positiven Ladung, eine solche trat auch ein, wenn man mit ganz vollen Gefässen experimentirte.

Es liegt nahe, diese Erscheinung im Anschluss an Faraday's Ausführungen so zu erklären, dass der weit abgestellte Kegel einfach als Receptor wirkt, indem er die negative Ladung der Luft aufnimmt, welche diese durch Reibung im Ausströmungskanaale der Bombe erhalten, während bei weiter hineingeschraubtem Kegel eine energische Friction an diesem selbst eintritt, wodurch er positiv electrisch wird. Es schien von Interesse, diese Annahme etwas näher zu prüfen. Dazu wurde ein 2 m langer Cylinder von 40 cm Durchmesser aus Zinkblech angefertigt (Fig. 16), dessen Enden durch zwei Deckel verschliessbar und mit Chatterton compound möglichst zu dichten waren. Der eine Deckel *A* gestattete mittels eines durchbohrten Gummipfropfens den Nippel einer Compressionsbombe luftdicht bei *a* einzuführen. Auf der anderen Seite ging durch den Deckel *B*, und zwar um mehr Halt zu gewähren, mittels zweier durchbohrter Gummipfropfen, jedoch durch eine Glasröhre von diesen isolirt, ein Kupferstab *eg*, dessen eines Ende einen ca.  $\frac{4}{5}$  der Weite des Cylinders ausfüllenden Blechtrichter *C* trug. Der Stab *eg* war ausserhalb

des Cylinders zunächst von einer Glasröhre *ff* und dann von einer abgeleiteten Kupferröhre *lm* als Schutzhülle umgeben. Ein durch passende Metallschirme geschützter angelötheter Draht *s* führte zu dem Näpfchen  $\beta$  der Wippe *I* und also auch zum Electrometer, resp. zur Erde je nach der Lage der Wippe. *bcd* sind kleine Ansatzröhren, zwei derselben (*d* und eine der anderen Seite) dienten dazu, den Cylinder unter Anwendung eines Blasebalges mit durch Watte filtrirter getrockneter Luft zu füllen. Die Dimensionen des übrigens abgeleiteten grossen Cylinders waren so gewählt, dass einmal selbst bei heftigstem Ausströmen aus der Bombe am geöffneten anderen Ende nur mehr ein schwacher Luftzug zu verspüren war, und andererseits, dass nur ein kleiner Theil des Luftstromes mit den Wänden zusammentraf. Die geringe Bewegung der Luft war nach dem Früheren nicht im Stande, den Trichter *C* zu electrificiren, trat aber die Luft negativ geladen aus der Bombe heraus, so wurde sie vom Trichter zum grössten Theile aufgefangen und musste an ihn ihre Electricität abgeben. In der That wurden so die Ausschläge am Electrometer bis zu  $1\frac{1}{2}$  Daniell erhalten, also recht bedeutende, wenn die Luft mit Heftigkeit aus der Bombe herausstürzte, was sich bei wiederholten Beobachtungen bestätigte. Es ist also mit Bestimmtheit anzunehmen, dass die Reibung im Ausflusskanal die Luft negativ ladet, die Bombe musste alsdann positiv werden. Auch dies wurde geprüft. Man stellte eine Bombe auf eine Glasplatte zugleich mit einem zum Halten dienenden Gestell und umgab sie mit einem abgeleiteten Metallcylinder und auch sonst möglichst mit schützenden Metallschirmen, ein Kupferdraht verband sie mit der Wippe *I* wie sonst den Kegel. Während nun ein zur Wasserleitung führender Draht mit der Hand an die Bombe gehalten wurde, fasste die andere Hand den Schlüssel und öffnete den Ausströmungskanal. Hierauf liess man den Schlüssel los und entfernte dann erst den Ableitungsdraht. Erfolgte das Ausströmen mit genügender Heftigkeit, so zeigten sich in der That positive Ladungen von entsprechender Grösse, solange nicht Wasser in dem Nippel sich niederschlug, was man an einem gurgelnden Geräusch bemerken konnte. Dann traten negative Ausschläge ein. Der Nippel kühlt sich nämlich bei starker Luftbewegung erheblich

ab, was leicht starke Niederschläge aus der umgebenden Atmosphäre zur Folge hat. Die Electricität verdankt also jedenfalls nicht, woran man allenfalls denken könnte, ihre Entstehung Erschütterungen<sup>1)</sup> des geriebenen Körpers (des Becherchens oder des Kegelapparates), wobei ja Reibelectricität sich bilden könnte. Die aus der Bombe tretende Luft ist selbst schon geladen, auch die Friction von Theilen der Bombe gegeneinander und die Uebertragung der Electricität durch Staub kann nicht schuld sein, sonst hinge das Vorzeichen der Ladung nicht von der Stellung des Kegels ab. Es muss also die Reibung des ausfliessenden Gases oder darin schwebender Partikelchen wirksam sein; aber es wäre möglich, dass Reibungen an den Glasstützen des Kegelapparates (man denke an die p. 530 erwähnten älteren Versuche) dabei stark mitwirken, etwa das Resultat bei weit abstehendem Kegel bedingen. Indessen Anbringen eines mit dem abgeleiteten Kasten durch angelötheten Draht verbundenen Schutzbleches änderte nichts an dem Sachverhalt. In Fig. 17 zeigt *lmn* das zweimal umgebogene Luftstrom von den Glasstützen abhaltende Blech. Ebenso wenig ist an die Reibung an dem Gummipfropfen, der natürlich stets ganz hinter der Mündung des Nippels liegen musste, zu denken.

Diese Versuche zeigen selbstverständlich nur, dass Luft, die noch Staub und etwas Feuchtigkeit enthält, unter heftiger Reibung an Metall sich recht merklich zu laden vermag. Auch bei dem Kegelapparat war keinerlei Nebelbildung oder Niederschlag zu beobachten.<sup>2)</sup> Es ist also wesentlich wohl der Staub, wenn nicht die Luft selbst, welcher den Erfolg bewirkt; den stark abgekühlten Nippel darf man freilich nicht direct mit der Atmosphäre in Berührung bringen, man muss ihn vielmehr bis zu seiner Erwärmung in Verbindung mit dem getrockneten Kasten lassen. Trotzdem beobachtete ich einmal einen Wasser-

1) Spätere Versuche zeigen, dass heftiges Ausströmen sozusagen keine Electricität liefert bei staubfreier trockener Luft, das könnte aber keinen Unterschied machen, wenn Erschütterung des geriebenen Körpers wirksam wäre.

2) Durch die Oeffnung *R* konnte man bei verschlossenem Kasten mittels eines Augenspiegels beobachten, ob beim Ausströmen irgend eine Trübung oder dergleichen an dem Kegel sich zeigte.

tropfen in dem konischen Raume bei *M* (Fig. 5), dort, wo der Conus des Nippels aufsitzt, der eventuell der adiabatischen Abkühlung seine Entstehung verdankt. Oft aber blieb alles ganz trocken trotz lebhafter Electricitätserregung. Meist fand sich an besagter Stelle ein gewöhnlich recht geringer Staubansatz, wohl von Theilchen herrührend, die aus der Bombe mitgerissen worden.

Ich habe mich mit diesen Versuchen an nicht völlig gereinigter Luft eingehender befasst, obwohl sie in gewisser Hinsicht nicht entscheidend sind, weil sie uns über das Verhalten gewöhnlicher Luft einigen Aufschluss geben, was vielleicht nicht ohne alle Bedeutung ist. Es war aber natürlich in hohem Grade wünschenswerth, mit weiter gereinigter Luft zu experimentiren. Um zunächst eine bessere Filtrirung zu ermöglichen, brachte Hr. Elkan vor dem Einsaugerohr seiner Pumpe ein ca. 50 cm langes und 10 cm weites Blechrohr an, welches mit reiner Watte vollgestopft wurde; durchlöchernte Böden und Drahtnetze verhinderten das Herausfallen und Mitgerissenwerden der Watte. Die früher erwähnten Trockenapparate schaltete man aus, da von diesen leicht pulverförmiges Material mitgerissen werden konnte. Die Pumpe stand also direct mit dem Watterohr und dadurch auch mit der freien Atmosphäre in Verbindung, dagegen wurde in die Bombe in Stangenform gegossenes Aetzkali eingebracht. Hierzu musste der umständliche früher erwähnte Process des Auflöthens vorgenommen werden, der aber zugleich eine sorgfältige Reinigung des Innern der Bombe gestattete. Zur besseren und schnelleren Concentrirung der Feuchtigkeit in der hinteren Gegend, wo das Kali sich befand, wurde der Boden der Bombe bei einigen Versuchen auch noch mit Eis gekühlt. Die auf solche Weise hergestellten Bomben fielen, wie das bei industriellem Betriebe nicht anders zu verwundern ist, nicht ganz gleich aus. Eine musste von vornherein ganz verworfen werden, da beim Probeöffnen derselben eine bräunliche Schmiere immer wieder ausfloss. Indessen erfüllten einige der Bomben ihren Zweck sehr gut, indem selbst bei heftigstem Ausströmen, soweit es die Apparate vertragen konnten, nur noch Spuren von Ladungen auftraten, wo sonst die Scala aus dem Gesichtsfelde hinausflog. Auf Schwefelsäure zum Trocknen wurde verzichtet, da

sie einmal von solch heftigem Sturmwinde umhergespritzt, eine gründliche Reinigung des arg zugerichteten Kegelapparates nothwendig machte. Statt dessen brachte man in die betreffenden Glasgefäße Aetzkali in Stangenform und füllte die Blechkasten vor den Versuchen mit filtrirter trockener Luft. Am 31. Juli 1891 z. B. wurde mit einer grossen Bombe gearbeitet, nachdem die Güte aller Verbindungen und der Isolation genau geprüft (1 Daniel gab  $170\mu$  Ausschlag). Jetzt vermochte stärkstes Strömen das Electrometer nicht mehr in Bewegung zu setzen, bei äusserster Heftigkeit rückte die Scala um ca.  $40\mu$  vor, wenn die Kugel weit abstand. Bei hineingeschraubtem Kegel war sogar durchaus keine Ladung zu bemerken, auch nicht, als die Bombe völlig geleert wurde. In letzterem Falle traten nämlich gewöhnlich besonders leichte Ausschläge ein, auch wenn sonst solche ausblieben, wahrscheinlich weil bei dem zur Erzielung der nöthigen Strömungsgeschwindigkeit alsdann weit geöffneten Ausflusskanäle die gesammte innere Luftmasse in heftigere Bewegung als sonst geräth, und daher leichter Staubtheilchen aus der Bombe mit fortgerissen werden. Von Wasser war an dem Nippel nach den Versuchen nichts zu bemerken, von Staub keine Spur, Reste von solchem mögen indessen noch die kleine negative Bewegung von  $40\mu$  verschuldet haben, die bei dem allerstärksten Strömen eintrat. Mit ähnlichem Erfolge wurde noch mit drei weiteren Bomben gearbeitet. Andere gaben grössere Ladungen, aber auch nur unter bedeutend heftigerem Strömen als früher bei weniger sorgfältig präparirter Luft. Wir stehen also hier vor dem bestimmten Ergebniss, dass durch Filtration und Austrocknen der Luft man ihre Fähigkeit, durch Reibung an Metall Electricität zu erregen, beliebig weit herunderdrücken, bis fast zum Verschwinden bringen kann, und man wird ohne Zögern den Satz annehmen dürfen, dass reine Luft bei mechanischer Reibung an Metall keine, oder doch nur eine ganz unbedeutende electromotorische Wirkung ausübt. Ich sage, mechanische Reibung, weil von einem chemischen Angriff der blanken Oberfläche keine Spur sich bemerken liess.

Es war nun von Interesse, nachzusehen, ob Sauerstoff, dessen Affinität zu Metallen doch in reinem Zustande ganz anders zur Geltung kommen kann, als mit so viel Stickstoff

gemengt, wie das bei atmosphärischer Luft der Fall ist, sich nicht wirksamer erweisen würde. Es kam zunächst wieder Sauerstoff zur Verwendung, wie ihn die Elkan'sche Fabrik liefert, und die Bombe wurde ganz in der früheren Weise an den Kegelapparat angesetzt. Hierbei war es möglich zum Theil ganz neue, innen sorgfältig gereinigte Bomben zu benutzen. *Es ergaben sich bei heftigen Strömen Ladungen von derselben Ordnung wie bei Luft, und soweit die Versuchsverhältnisse ein Urtheil gestatteten, traten solche nicht leichter ein als bei Luft. Schwächere Ströme waren gerade so unwirksam wie bei letzterer, einige Versuche ergaben sogar nur verhältnissmässig schwer Electricität, obwohl solche mit den fabrikmässig hergestellten Bomben schliesslich immer erhalten wurde.* Der Kegel blieb völlig rein, auch Beobachtung mit dem Augenspiegel ergab denselben völlig blank während des heftigsten Ausströmens, wie bei Luft und ebensowenig zeigte sich ein Wasserniederschlag am Kegel. Im Nippel war nach dem Ausströmen im allgemeinen weniger Staub zu bemerken, als bei Luft, auch höchstens Spuren von Feuchtigkeit.<sup>1)</sup> Sehr unbestimmt blieb indessen das Vorzeichen der Ladung. Hier hatte die nahe oder weite Stellung des Kegels nicht mehr den gewünschten regelmässigen Effect wie früher. Bei den ersten Beobachtungen über die seiner Zeit<sup>2)</sup> einiges berichtet worden, zeigte sich bei allen Stellungen des Kegels wesentlich nur positive Electricität, ein entschiedenes Auftreten von negativer war nicht zu constatiren. Meist traten nur vorübergehend kleine Ausschläge in diesem Sinne auf; grosse solche zeigten sich vereinzelt bei nahem Kegel, andere Male wurde bemerkt, dass bei ganz naher wie weiter Stellung des Conus nur positive Ausschläge erschienen. Bei Wiederholung der Versuche mit gereinigten neuen Bomben wurde dann z. B. am 8. November 1891 gefunden, zuerst bei ganz nahe gestelltem Kegel eine ziemlich negative Erregung (ca. 300  $\mu$ ), dann, indem allmählich durch langsames Aufdrehen die Stromstärke vergrössert wurde, Umkehr der Scala und bedeutend grösserer

1) Liess man Sauerstoff mit grosser Heftigkeit an oder in ein Becherglas stürzen, so zeigte sich keine Spur Wasserniederschlag.

2) Naturwissenschaftl. Rundsch. 6. p. 435. 1891.



positiver Ausschlag bis über die Grenze des Gesichtsfeldes hinaus (Nullpunkt bei 620). Wenn dann der Kegel ganz weit abstand, so zeigte sich auch eine kleine negative Ladung (ca.  $50 \mu$ ), dann gewaltige positive bis zum Verschwinden der Scala (1 Daniel gab  $190 \mu$ ). Indessen bei andern Versuchen ohne nachweisbar verschiedene Versuchsbedingungen spielten bereits negative Ladungen eine weit hervorragendere Rolle. Es fanden sich bei ganz nahem Kegel positive und negative Ausschläge, beide von erheblicher Grösse, einige Male bis zum Verschwinden der Scala nach der einen wie nach der anderen Seite, auch wiederholt bedeutende negative Ladungen. Einmal zeigte sich erst eine kleine negative Bewegung, dann eine grössere positive ( $150 \mu$ ), dann starke negative. Bei weit abstehendem Kegel fanden sich stets wie früher positive Ladungen mit kleineren vorhergehenden negativen; späterhin aber zeigte der Sauerstoff, obwohl er angeblich mit besonderer Sorgfalt hergestellt, ein ganz anderes Verhalten und zwar gleichgültig, ob langsamer oder schneller aufgedreht wurde. Jetzt erschienen bei ganz weitem Kegel mächtige negative Ausschläge, dagegen bei ganz nahem Kegel nach kleiner negativer Bewegung ( $30 \mu$  höchstens), sehr starke positive. Auch dieses Verhalten wurde wiederholt constatirt, kaum zeigte sich Staub am Nippel, kein Wasser, auch war der Kegel immer noch blank geblieben. Eine bestimmte Erklärung für diese Erscheinungen kann ich nicht geben, es liegt aber nahe, an das später noch zu besprechende Verhalten von pulverförmigen Substanzen zu denken, die, von einem Luftstrome bewegt, Reibungselectricität liefern, zumal da die Annahme, dass Nebeltheilchen bei gewissen Versuchen wirksam gewesen seien, bei andern nicht, nach dem früher Bemerkten wohl jeder Begründung entbehrt. Da nun aber in allen Fällen bisher starke Electricitätserregung sich einstellte, so unternahm ich eine optische Prüfung des Sauerstoffs in der Absicht zu untersuchen, ob derselbe etwa noch viel Staub enthalte. Eine cylindrische Glasröhre (48 cm lang, 11 cm Durchmesser) wurde an beiden Enden mit dichtschiessenden Messingkappen versehen, die kleinen Ansatzröhren *a* und *b* zum Ein- und Auslassen von Gasen trugen (Fig. 18). In dem Boden der Kappen waren runde Oeffnungen (6 cm Durchmesser) angebracht, und durch eingekittete Glas-



platten verschlossen, welche einem Bündel Lichtstrahlen den Eintritt in das Innere gestatten. Es wurde mit Sonnenlicht gearbeitet, das ein Spiegel durch einen Spalt in einen verdunkelten Raum hineinreflectirte, woselbst es von einer grösseren Linse aufgefangen zum Lichtkegel concentrirt in die Röhre eintrat. Stand diese einige Zeit mit gewöhnlicher Luft gefüllt verschlossen ruhig da, so war nichts von dem Strahlenconus zu bemerken, die Staubtheilchen hatten sich zu Boden gesenkt. Sobald man aber etwas von der äusseren Luft eintrieb, so erschien jener deutlich sichtbar. Wartet man wieder, bis er aufs Neue verschwunden, setzte aber jetzt eine Sauerstoffbombe an und liess sorgfältig etwas Gas einströmen, so zeigte sich der Lichtkegel aufs Neue, aber stets etwas schwächer als bei Luft. Der Sauerstoff war also reiner als diese, aber doch nicht ganz frei von suspendirten Partikelchen. Der Versuch wurde wiederholt, nachdem etwas Glycerin in die Glasröhre eingegossen und durch Neigen und Drehen an der Glaswand vertheilt worden, wonach ein etwaiges Aufwirbeln von Staub nicht mehr zu befürchten war und zwar mit demselben Erfolge wie früher. Ferner setzte man an den Nippel, nachdem er durch langsames Ausströmen mit Sauerstoff ausgespült worden war, mittels Kautschukschlauches eine vorn zugespitzte enge Glasröhre, die etwas Phosphorsäureanhydrid enthielt. Da zeigte sich denn nach stundenlangem Durchfliessen des Gases ein langsam zunehmendes Feuchtwerden des Pentoxydes. Es trat nun wieder die Frage auf, wie weiter gereinigter Sauerstoff sich verhalten würde. Um solches Gas herzustellen, lieferte mir Hr. Elkan einen sogenannten Ueberfüllnippel, ein starkes Messingrohr (Fig. 19, ca. 86 cm lang, 2 cm weit) bei *a* mit einer Verjüngung versehen, in die ein Körbchen aus Drahtnetz eingeschoben wurde. Das Messingrohr trägt auf den Enden je einen Nippel *C* und *D*, *D* dient zur Verbindung mit einem dickeren Messingstücke *A*, das an der Seite ebenfalls durch Nippelverbindung ein Manometer von Schaeffer und Buddenberg trägt. An *A* ist

1) Ueber die Röhre *a* und *b* waren Stücke Gummischlauch geschoben, welche einfach durch Einstecken kurzer zugeschmolzener Glasröhren zu verschliessen waren.

ferner noch ein Nippel *B* angebracht. Von *C* her wurde nun reine Watte eingestopft und das Rohr bis etwa zur Stelle *c* damit gefüllt. Das Drahtnetz bei *a* verhinderte ein weiteres Vordringen und Mitgerissenwerden derselben. Watte und Ueberfüllrohr wurden sorgfältig getrocknet mittels Durchleiten von trockener Luft und Auspumpen zum Theil unter Erwärmen. Dies geschah von einem Ende her durch ein Phosphorsäureanhydrid enthaltendes Gefäss hindurch, während man das andere Ende *C* dicht verschlossen hielt. Dann wurde vorn auf die Watte noch etwas durch Schmelzen von allem Wasser befreites Chlorcalcium eingeführt und hierauf an den einen Nippel *C* eine volle und an den anderen eine evacuirte Bombe <sup>1)</sup> angesetzt. Nun konnte man durch vorsichtiges Oeffnen der Schlüssel auf beiden Seiten das Gas aus der vollen Bombe in die leere übertreten lassen, indem es die Chlorcalciumschicht und den Wattefilter passiren musste. Man erhielt so allerdings nur ungefähr den halben Druck (45 Atmosphären), aber dies genügte vollständig, um unter gewöhnlichen Umständen Electricitätsmengen von der bisherigen Grösse zu erregen, wie man an einer noch weniger Druck zeigenden Bombe constatirte. Die so filtrirte trockene Gas enthaltende Bombe wurde nun an den neupolirten Kegelapparat angesetzt und am hinteren Ende mit Schnee und Salz gekühlt. Die Versuche wurden mit weit abstehendem Kegel angestellt unter sehr heftigem Ausströmen, aber es trat fast kein Ausschlag ein. Beim ersten Versuche zeigte sich  $20\mu$  negative Bewegung, dann ebensolche positive; beim zweiten unter sehr heftigem Herausströmen des Gases nur  $10\mu$  positive Bewegung, beim dritten und Sichleeren der Bombe nur  $1\mu$  positiven Ausschlag. Die andere den Rest unfiltrirten Sauerstoffs enthaltende Bombe wurde nun angesetzt, sie gab bei drei Versuchen erst  $240\mu$  negative Bewegung, ziemlich schwer eintretend, dann zweimal Verschwinden der Scala nach der negativen Seite hin, also ein sehr erheblicher Unterschied. Uebrigens fand sich auch bei der reinen Bombe ein klein wenig Staub am Nippel.

1) Diese war noch durch Erhitzen beim Auspumpen unter Einschalten eines Phosphorsäuregefässes besonders getrocknet worden. Der Ueberfüllnippel wurde vor dem Ansetzen der evacuirten Bombe mit Sauerstoff ausgespült.

*Der Sauerstoff ist also in der That bezüglich seiner electromotorischen Wirksamkeit bei mechanischer Reibung von Luft in gereinigtem Zustande nicht verschieden.*

Kohlensäure zeigt sich auf den ersten Anschein hin viel fähiger bei Friction eine Ladung zu erzeugen, als die beiden vorher untersuchten Gase. Setzt man eine grosse Bombe, wie sie die hiesige Actiengesellschaft liefert, mit dem früher erwähnten Nippel versehen, aufrechtstehend an den Kegelapparat an, ebenfalls mittels eines übergeschobenen passenden Gummipropfens, so traten schon bei schwachem Ausströmen, — man brauchte den grossen mit Chlorcalciumröhre versehenen Pfropfen bei *R* (Fig. 11) gar nicht abzunehmen — ganz merkliche und zum Theil recht starke Ladungen ein, unter Bedingungen also unter denen Luft und Sauerstoff keine Spur zeigten. Wenn z. B. der Verschluss des Compressionsgefässes beim Zudrehen des Rades *c* (Fig. 2) nicht ganz fest erfolgte, so zeigte sich das am Electrometer schon an. Wiederum bereitete aber das Vorzeichen der auftretenden Ladungen einige Schwierigkeiten. Stand der Kegel ganz nahe, so gab schwaches Strömen etwas negativen Ausschlag, stärkeres dagegen einen grossen positiven, bei weit gestelltem Kegel gab schon ganz schwaches Ausfliessen so viel negative Electricität, dass die Scala bis an das Ende getrieben wurde, stärkerer Strom dagegen mächtige positive Ladungen. Andermal aber traten grosse positive schon direct beim geringsten Oeffnen der Bombe ein. Das Gas fliesst in unserem Falle sehr häufig nicht ruhig und gleichmässig, sondern stossweise aus.<sup>1)</sup> Jeder solche Stoss verstärkt die Ladung, kehrt aber auch leicht das Vorzeichen um und begünstigt anscheinend das Auftreten positiver Ladungen. Da bei den Actiengefässen ein Ebonitverschluss statt hat, so wurde mittels eines von Hrn. Elkan gelieferten Ueberfüllnippels<sup>2)</sup> gasige Kohlensäure in eine Elkan'sche vorher leergepumpte

1) Wahrscheinlich verstopft sich die Stelle, wo der Verschluss stattfindet, mit Kohlensäureschnee.

2) Ein geeignet gebogenes starkes Kupferrohr, das an einem Ende einen zur Elkan'schen Bombe an dem anderen Ende einen zum Actiengefäss passenden Nippel trägt. Beim Ueberfüllen muss natürlich das letztere aufrecht stehen. Das Austrocknen des Blechkastens geschah mit Schwefelsäure.

grosse Bombe eingeführt, also bei gewöhnlicher Temperatur unter einem Drucke von 50—60 Atmosphären. Eine erste theilweise Füllung wurde zum Ausspülen wieder entweichen gelassen. Jetzt war, wenn eine solche Bombe an den Kegelapparat angesetzt wurde, die electromotorische Wirkung geringer, aber doch noch stärker als bei Luft und Sauerstoff. Bei nahem Kegel fand sich bei ganz langsamem Strömen eine kleine positive Verschiebung (ca.  $15\mu$ ), mit vorhergehender negativer Schwankung (ca.  $30\mu$ ), stärkeres Strömen gibt zunehmende positive Ladung. Bei ganz weitem Kegel fand bei schwachem Ausfliessen schon merkliche negative Erregung statt (bis  $140\mu$ ). Stärkeres Strömen vermehrte erst den negativen Ausschlag, dann erfolgt die Umkehr und positive Bewegung (über  $160\mu$ ), bei weiter verstärktem Ausfliessen aber wieder sehr energisch negative Ladung. Oeffnet man schnell, so trat sofort eine starker negativer Ausschlag ein. Zwischen Nippel und Kegelapparat wurde nun ein abgeleitetes Spiralrohr aus Messing eingeschaltet (Fig. 20) über dessen eines Ende *A* ein Gummipfropfen geschoben und anstatt des Nippels in den Kegelapparat eingeführt wurde. Das andere Ende trug eine Erweiterung *B*, in die ein Gummipfropf hineinpasste, dessen Durchbohrung zur Aufnahme des Nippels der Elkan'schen Bombe diente. Jetzt trat die Ladung<sup>1)</sup> noch schwieriger ein, und die positiven Ausschläge traten entschieden zurück, sowohl bei nahem wie bei weitem Kegel. Oftmals waren in beiden Fällen ausschliesslich negative Ladungen zu beobachten.

Es liegt nahe, in den vorliegenden Fällen die starke Wirkung durch Bildung von Kohlensäurenebeln zu erklären, die infolge der sehr erheblichen adiabatischen Abkühlung entstehen.<sup>2)</sup> Zu beachten ist allerdings, dass dabei auch Spuren von Feuchtigkeit, die etwa nicht ganz entfernt worden, sich condensiren können und möglicherweise Wasserreibung mit im Spiele ist; doch zeigte selbst bei directem Ansetzen eines

1) Befand sich die Spirale zwischen dem Actiengefäss und dem Kegelapparat, so kamen bei ganz schwachen Strömen keine Bewegungen der Scala mehr.

2) Die Röhren, durch welche das Ausströmen statthat, bedecken sich sehr bald mit Schnee aus der umgebenden Atmosphäre condensirt, was bei Luft und Sauerstoff nie eintrat.

Actiengefässes Beobachtung mit dem Augenspiegel keine Spur von Wasserniederschlag während heftigen Ausströmens und der Kegel blieb ganz blank. Es ist längst bekannt, dass flüssige Kohlensäure reichlich Electricität entwickelt, wenn sie aus einem Metallgefässe ausströmt<sup>1)</sup>, indessen konnte ich über das Vorzeichen derselben keine Angabe finden und stellte daher einige bezügliche Versuche an. Eine Actienbombe wurde in schräger Lage, die Ausflussöffnung nach unten, auf ein zu diesem Zwecke vorhandenes Holzgestell gelegt, und dieses wiederum behufs Isolirung auf eine Glasplatte gestellt. Liess man nun die Flüssigkeit, entweder in einem zum Auffangen von Schnee dienenden angehängten Wollbeutel, oder auch frei in die Luft ausströmen, so divergirten die Goldblättchen eines an die Bombe gehaltenen Beetz'schen Electroskopes mit positiver Ladung und zwar regelmässig bei wiederholten Versuchen. Der hervorstürzende nebelige Strom lud das in einige Entfernung von der Mündung gehaltene Electroskop negativ, dieselbe Electricität zeigte der aufgewirbelte Staub. Nahe an der Mündung trat auch positive Ladung ein, wohl weil hier die sehr heftige Reibung des Stromes am Messingknopf des Instrumentes überwog. Näherte man im Dunkeln der Bombe eine Nadelspitze, so glimmte sie und gab bei genügend kleinem Abstände Fünkchen. Mittels Ueberfüllnippels<sup>2)</sup> wurde dann noch eine evacuirte Elkan'sche Bombe mit flüssigem Kohlendioxyd theilweise gefüllt und dann auf das schräge Holzgestell gelegt, den aufgeschraubten Nippel nach unten. Das Resultat war dasselbe wie zuvor, nur der positive Ausschlag im Strahl nahe der Mündung fehlte. *Flüssige Kohlensäure ladet also Metall positiv bei Reibung. Negativ wurde die Bombe, wenn im Nippel Wasser sich condensirt hatte, sobald er aber sorgfältig getrocknet worden, erschien auch die positive Electricität aufs Neue.*

Demnach dürften also die positiven Ladungen von der Reibung der Kohlensäurenebel am Kegel herrühren, dagegen

1) Wiedemann, Electric. 1. p. 240.

2) Beim Ueberfüllen von Flüssigkeit muss natürlich das Actiengefäss mit der Ausflussöffnung nach unten höher liegen als die Elkan'sche Bombe.

dieser nur als Receptor wirken, wo negative Electricität auftritt. Der ausfliessende Gasstrom ist ja schon geladen; wird ferner die Spirale eingeschaltet, so vermehrt sich die Reibung in dem Ausströmungskanale noch weiter, und man versteht warum alsdann fast ausschliesslich negative Ausschläge erscheinen. Werden bei stossendem Fliessen flüssige Partikelchen mit Heftigkeit gegen den Metallconus geschleudert, so tritt dort leicht stärkere Reibung und infolge dessen Electricitätsbildung ein, und man versteht so die Begünstigung positiver Ladungen durch Stösse ebenso wie durch nahe Stellung des Kegels.

Es erübrigt aber jetzt noch nachzuweisen; dass bei Verhinderung der Nebelbildung in der Kohlensäure auch die Ladungen verschwinden. Hierzu wurden erst einige Beobachtungen über den beim Ausströmen stark comprimierter Kohlensäure sich bildenden nebeligen Strahl angestellt. Lässt man nämlich aus einem Actiengefässe, in welchem verflüssigte Kohlensäure sich befindet, in aufrechter Stellung, sodass also nicht direct condensirtes Kohlendioxyd ausfliessen kann, das Gas nur mit einiger Heftigkeit strömen, so bemerkt man leicht und deutlich vor der Ausflussmündung einen nebeligen Strahl. Füllt man eine Elkan'sche Bombe wie früher angegeben, mit stark verdichteter *gasiger* Kohlensäure aus einem Actiengefässe, so tritt die Bildung eines nebligen Strahles beim Auslassen des Gases schon weit schwieriger ein, wie wohl leicht zu verstehen. Das Ausströmen muss bei der kein condensirtes Kohlendioxyd enthaltenden Elkan'schen Bombe erheblich heftiger stattfinden, um eine deutliche Nebelbildung zu veranlassen. Bringt man an der Mündung des Nippels die oben genannte Spirale an, die das Gas beim Ausströmen in die Atmosphäre durchfliessen muss, so erscheint die Nebelbildung weiter sehr erschwert. Erst wenn die Spirale von der durchströmenden Kohlensäure stark abgekühlt war, sodass sie sich mit aus der umgebenden Luft niedergeschlagenem Schnee zu überziehen begann, vermochte man wieder einen nebeligen Strahl vor der Mündung des Spiralrohres zu bemerken. Tauchte man die Spirale in ein Gefäss mit kochendem Wasser, so war kein Nebel mehr wahrzunehmen, so heftig man auch strömen liess.



Diesem Verhalten des ausströmenden Gases entsprach nun vollständig die Fähigkeit der Kohlensäure, beim Vorbeifliessen an dem isolirten Messingkegel des Faraday'schen Apparates Electricität zu entwickeln. Setzte man direct das Actiengefäss an den Kegelapparat an, so trat, wie oben angegeben, schon bei recht schwachem Ausströmen eine merkliche Bildung von Electricität auf. Weniger leicht war dies der Fall beim Ersatze des Actiengefässes durch eine Elkan'sche Bombe, doch wie gesagt immer noch leichter als bei Luft und Sauerstoff. Schaltete man die Spirale vor der Elkanbombe ein, so zeigte sich noch schwieriger eine Ladung. Höchstens eine *kleine Bewegung* des Electrometers war zu constatiren, solange die *Spirale nicht stark abgekühlt* war; dann aber entwickelte sich energisch Electricität und die Scala der Poggendorff'schen Spiegelablesung verschwand unter schneller Bewegung aus dem Gesichtsfelde. *Tauchte dagegen die Spirale in auf etwa 200° C. erhitztes Oel, oder, wenn auch etwas weniger wirksam, in kochendes Wasser, so war die Bewegung des Electrometers auch bei heftigstem Ausströmen nur eine geringe (40—60  $\mu$ ) und ganz langsame, was sich bei wiederholten Beobachtungen stets bestätigte.* Hierbei muss natürlich die Spirale ganz durchwärmt sein. Vortheilhaft ist es ferner, das Röhrenstück, welches von der Spirale zu dem Kegelapparate führt, mit einer Flamme zu erhitzen. Auch sind stossweise Ausströmungen, die bei Kohlensäure oft eintreten, zu vermeiden, bei solchen wurde nämlich unter allen Umständen leicht eine vermehrte Ladung beobachtet wohl aus dem Grunde, weil heftig hindurchgeschleudertes Gas sich weniger gut zu durchwärmen vermag, als dies bei gleichmässigem Fliessen der Fall ist. Im entgegengesetzten Sinne wirksam, wie Erhitzen der Spirale, war Einbringen derselben in Kältemischung. *Unverkennbar deuten diese Versuche darauf hin, dass auch gasförmige Kohlensäure nicht im Stande ist, bei mechanischer Reibung an Metall Electricität zu entwickeln.*

Da bei der Electricitätserregung durch Gasreibung Staub und eventuell Wasser eine so wichtige Rolle spielen, sind einige Untersuchungen, welche speciell diese Themata betreffen, ausgeführt worden.



Faraday<sup>1)</sup> hat gefunden, dass pulverförmige Substanzen, welche von einem Luftstrome fortgeführt werden, doppelsinnige Ladungen ergeben: Zuerst Divergiren in dem einen Sinne, dann bei anhaltendem Luftstrome Zusammenfallen der Goldblättchen und sogar schwacher entgegengesetzter Ausschlag. Meine Untersuchungen stimmen damit in mancher Hinsicht überein. Beobachtet wurde mit Zimmerstaub, Eisenfeilen und Eisenoxyd der Apotheken, da ähnliche Stoffe wohl bei der Gasreibung in den früheren Versuchen wirksam waren. Weil die Friction an Messingtheilen und an Stahl (die Bombe und vor allem auch die Verschluss spindle bestanden ja aus letzteren) statt hat, so liess man auch die Pulver sich an diesen beiden Metallen reiben. Es wurden kleine, vorn mit einer in der Mitte durchbohrten Platte desselben Materiales verschlossene Cylinder (Fig. 20) aus Messing oder Stahl auf einem Glasfuss befestigt, das Ganze dann in den Pappkasten gestellt und ein angelötheter Messingdraht in das Quecksilbernäpfchen  $\beta$  der Wippe *I* getaucht. Bei Messing wurde auch noch eine andere Form der Reibröhre, wie das die Pulver enthaltende Gefäss fortan heissen soll, verwendet, nämlich eine weitere Röhre, die in einen noch weiteren Cylinder führte, der an seinem anderen Ende ein engeres Messingrohr trug (Fig. 21). In das weitere Rohr, resp. in das offene Ende des Cylinders in dem ersteren Falle, wurde mittels Gummipfropfens *a* eine abgeleitete Messingröhre *b* eingeführt, die aus dem Pappkasten durch ein Loch in dessen Wand heraustrat und durch Gummischlauch mit einem Blasebalg verbunden war. Auf der anderen Seite stand ebenfalls isolirt ein Metallgefäss *B*, in das die Reibröhre hineinragte, und welches zum Auffangen des hinein-geblasenen Staubes diente. Ein angelötheter Draht gestattete, das Auffangegefäss entweder abzuleiten, oder, wenn die Reibröhre mit der Erde verbunden war, dasselbe mit dem Quecksilbernäpfchen  $\beta$  der Wippe *I* in Communication zu setzen. Dann konnte eventuell, falls das Pulver nicht zu heftig herausgeschleudert wurde und so wieder starke Reibungen hervorrief, die Electricität des Pulvers bestimmt werden, während sonst

1) Faraday, *Experim. Untersuch.* 2. p. 112, § 2139, Uebers. von Kalischer.

bei isolirter Reibröhre das Electrometer die Ladung dieser anzeigte.

Der gewöhnliche Zimmerstaub macht Messing regelmässig negativ, er selbst erwies sich, bei vorsichtigem Auffangen, als positiv. Wurden Staub und Metallcylinder unter eine Luftpumpenglocke neben Schwefelsäure zum Austrocknen gebracht, so war die Wirkung besonders stark. Schon bei schwachem Blasen verschwindet die Scala; das Stahlrohr wurde dagegen positiv, allerdings in verschiedenem Grade und zwar bei kurz aufeinanderfolgenden Versuchen. Trocknen, wie eben angegeben, und Reinigen des Stahlrohres mit Schmirgel und nachfolgendem Auswischen scheint gleichfalls günstig zu wirken.

*Eisenoxyd* gibt viel weniger bestimmte Resultate, es macht Messing (beide Gefässe) wiederholt positiv, dann aber gab es Ausschläge nach beiden Richtungen; bei stossweisem Blasen überwiegt die negative Bewegung, weiterhin liefert keine Art des Blasens mehr etwas bestimmtes, Reinigen der Röhren und Austrocknen hilft desgleichen nicht. Trotz ebenso sorgfältiger Behandlung der Versuchsgegenstände erscheint z. B. in zwei Fällen, das eine mal direct negative, dann positive Ladung, dann unbestimmtes Resultat. Ein anderes mal dagegen erst positive Bewegung, dann nichts bestimmtes, dann bei stärkerem Blasen negative Ladung. Da bei den Versuchen mit Sauerstoff solche oxydirte Partikelchen wohl eine Rolle spielen, so könnte man danach einigermaassen die schwankenden Ergebnisse, über die früher berichtet worden, verstehen. Das Stahlrohr wird mit Eisenoxyd stark negativ geladen, ohne besonderes Blasen schon verschwindet die Scala. Das Auffangegefäss zeigt bei nicht zu heftigem Wehen starke positive Electricität, doch stellte sich bei wiederholten Versuchen wiederum Unbestimmtheit ein, sogar schwache positive Erregung der Reibröhre, in dessen nach Reinigen und Austrocknen treten die starken negativen Ladungen wieder auf. *Eisenpulver* macht Messing und Stahl, besonders bei gutem Austrocknen, entschieden positiv, doch wurde auch das Auffangegefäss positiv, die negative Ladung des Pulvers zeigte sich niemals.

Befand sich kein Pulver in den Reibröhren, so gab der Luftstrom keine Spur von Ladung, aber die kleinste Menge fester Substanz machte sich oft schon am Electrometer bemerklich.

In eine Elkan'sche grosse Bombe wurde mit einer zweistufigen Luftpumpe und einem Druckschlauch gewöhnliche ungetrocknete Luft so weit als möglich eingepresst. Bei thunlichst schnellem Oeffnen und Auffangen des Luftstromes mit einer Kochflasche zeigte sich kein deutlich wahrnehmbarer Wasserniederschlag<sup>1)</sup>, auch nicht, nachdem etwas Wasser in die Bombe gebracht worden und dieses längere Zeit darin verweilt hatte, sodass die Luft sich sättigen konnte. Die immerhin verhältnissmässig langsame Art des Oeffnens und die Enge und Gestalt des Ausströmungskanales sind eben der adiabatischen Abkühlung nicht günstig, auch ergab sich, an den Kegelapparat angesetzt, nur ein kleiner negativer Ausschlag ( $50 \mu$ ). Ganz anders gestaltete sich die Sache, als möglichst entsprechend den Angaben des Hrn. Sohnke ein cylindrisches Kupfergefäss construiert wurde, etwa 24 cm hoch und 14 cm im Durchmesser, mit einem Ausströmungskanal von 8 mm Weite und 7 cm Länge im ganzen, verschliessbar durch einen Hahn, dessen Durchbohrung dieselbe Weite besitzt, und in diese Metallbüchse Luft eingepresst wurde. Da zeigte sich sofort beim schnellen Aufdrehen des Hahnes ein reichlicher Wasserniederschlag auf einen in den Strom gehaltenen Gegenstand. Eine mit Glasgriff versehene Messingplatte dem Anprall der herausstürzenden Luft ausgesetzt, erwies sich, mit dem Fechner'schen Electroskop untersucht, sofort als geladen. Die Flasche, an den Kegelapparat angesetzt, lieferte beim plötzlichen Oeffnen sehr starke Ausschläge, nur wenn die Feuchtigkeitscondensation ganz unbedeutend oder gar nicht auftrat, war der electriche Effect entsprechend verschwindend, und es zeigte sich ganz deutlich, dass ersterer die nothwendige Bedingung für letzteren bildet. Das Vorzeichen der erhaltenen Ladungen indessen bereitete Schwierigkeit und veranlasste zahlreiche Versuche. Die Hrn. Elster und Geitel<sup>2)</sup> haben bereits betont, dass es schwer hält, bestimmt wiederkehrende Erfolge im Sinne von

1) Es sei hier nochmals bemerkt, dass Sauerstoff sehr heftig aus einer Bombe in ein Becherglas herausstürzen gelassen auch gar keinen Niederschlag gab.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 32. p. 75. 1887.

Faraday und Hrn. Sohnke zu bekommen. Ich kann dies voll bestätigen, nur einige Beobachtungen über den Einfluss des Oberflächenzustandes des geriebenen Metalles veranlassen mich, hier noch etwas über den betreffenden Gegenstand mitzutheilen. Trotz aller Reinigungsversuche des Gefäßes<sup>1)</sup>, wie besonders auch der Theile des Ausströmungskanales, ergab sich nämlich, dass die geriebene Metallplatte beim *plötzlichen Oeffnen* des Hahnes *positiv* wurde in der bei weitem überwiegenden Zahl von Fällen, doch sind entschiedene Ausnahmen vorhanden. Der Kegelapparat gab eine *mächtige positive* Bewegung unter solchen Umständen, eine viel kleinere *negative* bei *allmählichem Oeffnen*, wenn dies in geeigneter Weise geschah, sonst erscheint schwächere positive Ladung oder gar nichts. Mit der Platte und dem Fechner'schen Electroskop war die negative Ladung meist zu schwach, um nachweisbar zu sein. Später wurde zu den Versuchen eine Art Fahne aus Messingblech verwendet (Fig. 23), an deren Stiel ein Griff von Siegellack *g* angekittet, resp. später ein Glasgriff sich befand. Dieser wurde von dem verstellbaren Arme eines eisernen Gestelles gefasst. Ein angelötheter Messingdraht führte zu dem Pappkasten und zur Wippe *I*. Man konnte so dem der Wasserreibung auszusetzenden Blech verschiedene Lagen und Höhen bezüglich des Compressionsgefäßes geben, dasselbe der Mündung mehr oder weniger nähern und entfernen, quer oder schräg oder parallel zu dem Luftstrome stellen, auch so, dass nur die eine oder die andere Seite oder auch beide zugleich getroffen wurden. Der Siegellack, resp. Glasgriff war weit genug entfernt, um keiner Reibung durch den Luftstrom mehr ausgesetzt zu sein, das ist wichtig, da Iso-

1) Es wurde wiederholt mit heisser Sodalösung ausgewaschen, wobei die Lösung längere Zeit in der Kupferbüchse verweilte. Der Ausströmungskanal wurde dauernd eingetaucht, dann alles einfach so trocknen gelassen; als das nichts half, wurde mit destillirtem Wasser ausgespült und feucht wie getrocknet (durch Durchsaugen von Luft unter Erwärmen) mit dem Gefäße experimentirt. Später wurde dasselbe aufgelöthet, innen mit Oxalsäure, dann heisser Sodalösung ausgewaschen, mit Alkohol und Wiener Kalk polirt und mit Petroleumäther ausgespült, der Ausflusskanal auch noch frisch ausgebohrt. Das Comprimiren mittels Luftpumpe durch einen Schlauch wurde verlassen und ein Wassercompressionsapparat nach dem Muster von Hrn. Sohnke eingeführt.

latoren, in dem feuchten Luftstrom gehalten, auch Ladungen zeigen.<sup>1)</sup> Wenn das Metall gereinigt war, entweder nur abgeschmirgelt oder hinterher noch mit Petroläther behandelt, oder auch noch mit Alkohol und Wiener Kalk polirt, so erwies sich fast ausnahmslos bei plötzlichem Oeffnen und nicht zu weiter Entfernung des Bleches von der Mündung das Metall als positiv geladen. Bei weiterer Entfernung, wo die Fahne nur noch als Receptor wirken kann, oder bei geeignetem langsamen Oeffnen zeigten sich dagegen leicht negative Ladungen. Das Gefäss selbst, isolirt aufgestellt und bei Aufdrehen des Hahnes mit einem Glasgriff, wird infolge plötzlichlichen Ausströmens positiv.<sup>2)</sup> Einblasen von Cigarrenrauch in das Compressionsgefäss, Aussetzen der Mündung einer Staubwolke verstärkten wohl die Menge der erzeugten Electricität, aber änderten das Vorzeichen nicht. Wischte man die Fahne mit gewöhnlichem Aether, wie er sich gerade vorfand, ab, so blieb nachher eine bräunliche Schmiere auf dem Metall zurück, und nun gab schnelles Anblasen negative Electricität, aber dies hörte auf, sobald das Blech gereinigt worden. Starkes Erhitzen des Bleches hatte stets den Erfolg, dass nunmehr energisch negative Electricität erregt wurde, bei dem Erkalten traten aber die positiven Ausschläge wieder hervor, oft, wenn das Metall noch recht heiss war. Um zu sehen, ob die directe Berührung mit den Flammengasen nicht etwa von Einfluss sei, nahm man das Erhitzen so vor, dass ein grösseres Metallblech an die hintere Seite der Fahne gebracht wurde und gegen dieses dann die Flamme eines Bunsenbrenners einwirkte. Die so gänzlich geschützte Vorderseite, plötzlich angeblasen, ergab aber gerade so gut negative Ladung, wie früher bei directem Erhitzen. Wird dieses und darauf folgendes Abkühlen ohne Abtrocknen und Reinigen wiederholt vorgenommen, so rückt die Temperatur, bei der noch positive Ladung auftritt, immer

1) Ich habe gefunden, dass Siegellack, nahe an die Mündung gebracht, stark positiv wurde; weiter abgehalten erschienen bisweilen negative Ladungen. Ein mit Salpetersäure, Kalilösung und destillirtem Wasser behandelter trockener Glasstreifen zeigte keine bestimmbar Ladungen.

2) Das Hahndrehen selbst ist nicht etwa die Ursache der positiven Electricität, wie besondere Versuche darthaten.

tiefer herab und schliesslich wird auch das gänzlich abgekühlte Metall selbst mehrere Stunden nach dem Erhitzen noch immer wieder negativ. Dabei hat sich das Aussehen des Metalles geändert, es ist bräunlich geworden, doch kann sehr langes, ruhiges Stehen den electromotorischen Effect wieder mehr oder minder ändern. Reinigt man die Oberfläche aufs neue, so ist auch die positive Ladung sofort wieder da. Diese Versuche zeigen, wie mir scheint, deutlich, dass noch andere Factoren, wie die eventuelle Gegenwart von Fett oder Harz oder dgl. für das Vorzeichen der Electricität bei Tröpfchenreibung maassgebend sind. Infolge der Behandlung der Ausströmungskanäle zum Zwecke des Reinigens könnte z. B. eine solche Beschaffenheit erzielt worden, dass sie sich bei Wasserreibung negativ ladet, alsdann würde der Luftnebelstrom bei langsamem Oeffnen seine positive Ladung an einen Empfänger abgeben können. Erhitzt man die geriebenen Körper zum Trocknen, so dürfte möglicherweise bei ihnen der oben beschriebene Fall eintreten und wir hätten dann Resultate vor uns, wie sie Faraday und Sohnke erhalten.<sup>1)</sup> Erwähnt sei übrigens hier noch, dass die beiden früher besprochenen unfreiwilligen Versuche über Reibung von Wasser, das sich im Nippel condensirt, das Metall negativ ergaben, ohne dass besondere Reinigungsanstalten getroffen worden. Auch Armstrongs Untersuchungen an comprimirt feuchter Luft ergaben das Metall negativ.

Was Versuche über Wasserreibung an Metall anbetrifft, bei denen direct ein Flüssigkeitsstrahl gegen solches gerichtet, oder ein abgeleiteter Verstäuber verwendet wurde, indem man diesen mit einem Luftstrom anblies, oder auch, wenn man in eine<sup>2)</sup> vor einer mit comprimten Gas gefüllten Bombe angebrachten kleinen Kammer destillirtes Wasser brachte und dieses dann vom Gasstrome mit fortreissen und sich reiben

1) Ich will so erfahrenen Experimentatoren gegenüber nicht die Nothwendigkeit dieser Erklärung behaupten, nur auf die eventuelle Geltung einer solchen hinweisen.

2) Die Apparate für Wasserreibung standen dabei in einem abgeleiteten Blechkasten.

3) Faraday beschreibt einen ähnlichen Versuch, der aber auch nicht immer Electricitätserzeugungen lieferte. Experiment. Untersuch. 2. p. 111, § 2134, Uebers. von Kalischer.



liess, so kann sich Verfasser ganz den Beobachtungen der Hrn. Elster und Geitel<sup>1)</sup> anschliessen, es tritt keine nennenswerthe Ladung in diesen Fällen ein. Kleine, besonders negative Bewegungen des Electrometers, das sich übrigens bei diesen Versuchen recht ruhig verhielt, rühren wohl zumeist von der Contactwirkung, die ja bei der Berührung von Wasser mit Metall eintreten muss, resp. von Aenderungen in der Art der Benetzung her, welche sich beim Blasen auf nasses Metall einstellen. Uebrigens haben obengenannte Forscher<sup>2)</sup> mit Recht auf starke Fehlerquellen hingewiesen, die sich bei solchen Beobachtungen leicht einstellen, und die zur Vorsicht bei der Deutung derartiger Versuche mahnen. Bei den Experimenten mit plötzlicher Entspannung der Luft dürfte aber bei der Kürze der Zeit, die der Nebelbildung und Electricitätserregung gewährt ist, die Influenz etwa geladener Staubtheilchen nicht von grossem Belang sein, während bei einer andauernden Wasserzerstäubung allerdings auf diese Weise eine erhebliche Ladung eintreten kann ohne Mitwirkung von Tröpfenreibung.

Fragen wir uns nun, welcher Art die Vorgänge sind, die bei der Reibung eines Gasstromes an einem Metallkörper eine Rolle spielen, so tritt uns die Auffassung entgegen, es fände überhaupt gar keine Reibung am Metalle statt, letzteres sei von einer Gasschicht überzogen, die sich immer bildet, wenn auch nicht momentan in voller Dicke, sobald ein starrer Körper mit einem Gase in Berührung kommt. Luft reibe sich also, wie Hr. Spring bemerkt, nur an adsorbirter Luft, wo kein electromotorischer Gegensatz vorhanden, also auch Reibung unwirksam sei. Indessen, wenn man mit trockener Luft arbeitet, dürfte doch die adsorbirte Schicht, weil schon Wasser enthaltend, nicht ganz identisch in der Zusammensetzung sein mit der reibenden Luft, und es ist doch eine bekannte Thatsache, dass sonst völlig identische Substanzen infolge kleinster Oberflächenverschiedenheiten schon Frictionsladungen geben. Bei der Tröpfchenreibung findet ja energische Electricitätsbildung statt, obwohl sicher die Luftschichten an den geriebenen Körpern nicht wasserfrei. Flüssige Kohlensäure thut

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 32. p. 88. 1887.

2) l. c. p. 77.



dasselbe an Substanzen, die mit Kohlensäure länger in Berührung gewesen und Gelegenheit hatten, solche zu adsorbiren. Man müsste also schon schliessen, dass bei etwas anderer Zusammensetzung der Oberflächenschicht gegenüber der der reibenden Substanz eine electromotorische Kraft vorhanden ist. Bei Faraday's Versuchen machte sich übrigens die Natur des die Reibung erleidenden Stoffes deutlich bemerkbar, sei es, dass aus ihm der Ausströmungskanal hergestellt worden, oder dass man ein Stück davon in den Dampfstrahl hielt, indem z. B. eine Röhre aus Federkiel oder Elfenbein den Dampfstrahl ungeladen austreten lässt. Die Temperatur ist hierbei entschieden nicht hoch genug, um alle adsorbirten Schichten völlig entfernen zu können; es sei hier nochmals an die negativen Ergebnisse der Versuche von Elster und Geitel erinnert, und auch daran, dass die Erhitzung der Spirale gegen  $200^{\circ}$  bei meinen Versuchen die electromotorische Wirksamkeit durchaus nicht vergrösserte. Würden die Gashüllen dadurch genügend von dem Metalle entfernt und alsdann erst Reibung am Metalle ermöglicht, so hätte ja trotz Verschwindens alles Nebels die Kohlensäure kräftige Ladungen liefern müssen. Man muss also wohl aus Faraday's Versuchen schliessen, dass *die Natur der festen Substanz, trotz etwaiger adsorbirter Gasschichten, noch immer sich geltend macht*, man müsste denn wieder annehmen, dass Elfenbein und Federkiel überhaupt nicht zu adsorbiren im Stande sind, was aber bislang durch nichts bewiesen ist. Auch bei meinen Versuchen über Tröpfchenreibung machte sich in der oben geschilderten Weise der Zustand der Oberfläche geltend bis zur Umkehr des Vorzeichens. Sollte dann aber nicht auch dasselbe der Fall sein, wenn Gas mit Heftigkeit gegen einen fremden Körper getrieben wird? Bringen wir Metall in Chlor, so tritt sofort chemische Einwirkung ein, ersteres ist dem Gase also doch zugänglich, oder sollte das nur geschehen können, indem das Chlor zunächst adsorbirt wird, und dann erst chemische Einwirkung erfolgt? Sollte dann aber, wenn solche Vorgänge so schnell abzulaufen vermögen, bei dem starken Anprall der anstürmenden Luft nicht irgendwelche Veränderung bis zu dem Metalle selbst sich fortpflanzen? Ueber die nähere Beschaffenheit der adsorbirten Schichten

befinden wir uns allerdings noch einigermaassen im Unklaren. Bei Gasen, deren kritische Temperatur höher liegt als die Versuchstemperatur, nimmt man wohl allgemein das Eintreten von Verflüssigung an. Dann sind also die adsorbirten Schichten, insofern als sie Wasser und Kohlensäure enthalten, sicher dem flüssigen Aggregatzustande ähnlicher als dem gasigen, und doch geben Wasser und flüssige Kohlensäure gerade starke electricische Wirkungen, aber durchaus nicht, wenn gasförmig. Liegt die kritische Temperatur tiefer als die der Versuche, so ist nach Hrn. Ostwald<sup>1)</sup> ein einfaches Zurückhalten der Molecüle anzunehmen, vielleicht auch ein Hin- und Hergeworfenwerden der Molecüle zwischen den Vorsprüngen des festen Körpers während einiger Zeit, bevor dieselben die Oberfläche wieder verlassen. Hr. Voigt<sup>2)</sup> dagegen nimmt drei Schichten an, eine gasige, leicht zu entfernende, eine flüssige und eine quasi starre. In letzterem Falle tritt somit sicher, wenn gegen einen festen Körper ein Luftstrom getrieben wird, Reibung an einer anders gearteten Fläche ein. Dasselbe gilt, wenn etwa durch das Polirmittel eigenthümliche Oberflächenschichten erzeugt werden sollten. Sind Ostwald's Annahmen richtig, so würde ein heftiger Ansturm von Gasmasse sicher ein heftigeres und häufigeres Anprallen der Molecüle bewirken, resp. die Zahl der anhaftenden vermehren, zugleich aber auch würden zahlreichere Molecüle mit fortgerissen werden. Laden sich die letzteren bei Contact mit Metall, so müsste sich das entschieden bemerkbar machen, indem der electricische Zustand des Metalles entsprechend geändert würde. Man muss nach Ansicht des Verfassers ziemlich gezwungene Annahmen machen, falls man die Unwirksamkeit der Luftreibung aus der Existenz adsorbirter Gashüllen erklären will. Solche hindern ja nicht, dass bei festen Körpern oft schon leichteste Reibung genügt, um merkbliche Electricitätsmengen hervorzurufen. Hier könnte allerdings eingewendet werden, es fände Berührung in diesem Falle nur an vereinzelt sehr wenig ausgedehnten Stellen statt. Der scheinbar so geringe Druck der beiden Körper gegeneinander sei, auf die wirklichen Berührungsflächen ungerechnet, aber

1) Ostwald, Allg. Chem. 1. p. 92. 1891.

2) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 42. 1883.

doch stets bedeutend genug, um die adsorbirten Schichten zu durchdringen und eine wirkliche Berührung der festen Körper zu ermöglichen. Ist aber einer der beiden Körper ein weicher Stoff, so erscheint diese Auffassung doch schon recht fraglich, ganz ungeeignet aber vollends bei der Tröpfchenreibung. Hält man wirklich die Luftreibung aus dem obengenannten Grunde für unwirksam, wie verhält es sich dann mit Sauerstoff und Kohlensäure? Diese sind doch von der Zusammensetzung der Gashüllen erheblich verschieden und doch sind sie electromotorisch bei Reibung unwirksam. Sollte sich sofort eine Hülle des betreffenden Gases bilden und derselbe Fall wie bei Luftfriction eintreten? Haften die adsorbirten Gase so fest, dass sie das Metall den anprallenden Moleculen gänzlich unzugänglich machen, so können sie nicht mit einem mal völlig entfernt werden, es kann sich alsdann nur um eine Art Ueberzug handeln, der sich bildet, indem Theile der früheren Luft-hülle hinweggerissen werden. Dann ist aber auch anzunehmen, dass bei heftigem Strömen des Gases dieser Ueberzug fortgerissen und wieder erneuert wird; also fände eine Art von Reibung der äusseren adsorbirten Schicht an der inneren Luft-hülle statt, da sollte denn doch bei der Verschiedenheit der Zusammensetzung Electricität auftreten. Kaum dürfte dies alles wohl anders zu deuten sein, als dass *der gasförmige Zustand besonders ungeeignet ist zu electromotorischer Wirkung wenigstens bei Reibung*. Sind in der That die Gase so vollkommene Isolatoren, wie nach den neueren Versuchen zu erwarten, können sie etwa ohne Dissociation nicht leiten, so ist auch nicht recht einzusehen, wie sie sich durch irgend eine reine Contactwirkung (ohne chemische Vorgänge) laden können. Solches würde ja einen Zerfall in Ionen bedingen, von denen sich nur die eine an dem Metalle entladen könnte. Doch soll eine weitere Ausführung dieser Anschauungen hier nicht versucht werden.

### III. Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Electroden; von F. Richarz.

#### I.

Die galvanische Polarisation kleiner Platinelectroden bei grosser Stromdichtigkeit ist kürzlich von den Hrn. Koch und Wüllner<sup>1)</sup> zum Gegenstande einer Arbeit gemacht worden, gegenüber deren Folgerungen ich meine frühere Untersuchung derselben Frage<sup>2)</sup> in mehreren Punkten zu vertheidigen habe. Zunächst fasse ich die Resultate meiner älteren Arbeit kurz zusammen.

Für die Polarisation, unter welcher, wie üblich, die electromotorische Gegenkraft in der Zelle verstanden werden soll, ergeben die von den Hrn. Buff<sup>3)</sup> und Fromme<sup>4)</sup> angewandten Methoden, nach welchen auch ich im ersten Theile meiner Arbeit Messungen angestellt habe, bei grosser Stromdichtigkeit sehr grosse Werthe bis zu 4,3 Daniell. Ferner ergeben dieselben starke Zunahme der Polarisation und Abnahme des Widerstandes der Zelle bei wachsender Stromintensität. Voraussetzung der Methoden ist aber Constanz der Polarisation und des Widerstandes; da also die Resultate im Widerspruche mit den Voraussetzungen stehen, sind die obigen Methoden bei kleinen Electroden unzulässig, und man kann aus ihnen nichts bestimmtes schliessen.

Im zweiten Theile der Arbeit habe ich gezeigt, dass von den Voraussetzungen jener Methoden diejenige nicht erfüllt ist, dass der Widerstand einer Zersetzungszelle mit Platinelectroden von sehr geringer Oberfläche unabhängig sei von der Stromstärke. Vielmehr muss der Widerstand mit wachsender Intensität abnehmen erstens infolge der Erwärmung der den Electroden unmittelbar anliegenden Flüssigkeitsschicht; zweitens

1) Koch u. Wüllner, Wied. Ann. **45**. p. 475 u. 759. 1892. Im Folgenden mit l. c. bezeichnet.

2) Richarz, Wied. Ann. **39**. p. 67 u. 201. 1890. Im Folgenden mit l. c. bezeichnet. ✓

3) Buff, Pogg. Ann. **130**. p. 341. 1867. ✓

4) Fromme, Wied. Ann. **33**. p. 80. 1888; **39**. p. 187. 1890. ✓

infolge der dem Siedeverzuge ähnlichen erschwerten Gasentwicklung bei niederen Intensitäten; drittens infolge des Uebergangswiderstandes infolge der Diffusion der Gase, auf welchen Hr. v. Helmholtz<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht hat.

Im dritten Theile sind die Bestimmungen der Polarisation beschrieben, welche ich mit dem Helmholtz'schen Pendelunterbrecher angestellt habe. Diese Versuche ergaben zwar nicht die Polarisation während der Dauer des polarisirenden Stromes; aber auch nicht ihren Werth zu einer bestimmten Zeit *nach* Unterbrechung jenes Stromes; sondern den Mittelwerth der Polarisation während ihres Abfalles in der Zeit von dem Augenblicke einer erheblichen Schwächung des polarisirenden Stromes an, bis zu einem 0,0006 bis 0,008 Sec. späteren Augenblicke. Die Methode bietet mit der Fechner'schen Methode zur Bestimmung electromotorischer Kräfte<sup>2)</sup> die Uebereinstimmung, dass in einem Stromkreise mit sehr grossem Widerstande kleine Widerstandsänderungen unberücksichtigt bleiben dürfen, und die Intensität der electromotorischen Kraft proportional gesetzt werden kann. Auf die Art, wie der Pendelunterbrecher die Umschaltung bewirkt, will ich nicht näher eingehen. Die Resultate meiner Messungen sind: Bei den kleinen Electroden wird schon für geringe Intensitäten das Maximum der Polarisation erreicht. Der grösste Werth derselben, wie er aus meiner Methode unmittelbar hervorgeht, ist 2,4 Daniell. Dies ist der Mittelwerth der abfallenden Polarisation während einer sehr kurzen, 0,0006 bis 0,008 Sec. betragenden Zeit nach Schwächung des polarisirenden Stromes. Durch Veränderung dieser sehr kurzen Zeit gewinnt man ein Urtheil über die Schnelligkeit des Abfalles der Polarisation. Für kleine Intensitäten liess sich ein solcher mit Sicherheit messen; für grosse Intensitäten fiel er in den Bereich der bei diesen grösseren Beobachtungsfehler. Diese Messungen liessen mit grosser Wahrscheinlichkeit darauf schliessen, dass die Polarisation *vor* der Unterbrechung nur

1) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. der Berl. Akad. p. 664. 1833; Wied. Electr. 4. p. 1305.

2) Wüllner, Experimentalphysik. 4. 4. Aufl. p. 603. Die Sätze, welche Fechner für den „Uebergangswiderstand“ bei der Electrolyse fand, vgl. ebenda p. 765.

einen um einige Zehntel Daniell höheren Werth als den direct gefundenen von 2,4 Daniell besitzen kann.

## II.

Der erste Einwand, welchen die Hrn. Koch und Wüllner gegen meine Messungen erheben, bezieht sich auf die soeben erwähnte, in meiner Arbeit bereits berücksichtigte Möglichkeit eines starken Abfalles der Polarisation. Die Hrn. Koch und Wüllner schliessen aus ihren Versuchen auf einen Anfangswerth derselben von 3,8 Volt, gleich 3,4 Daniell.

Soweit ich den Abfall habe messen können, in der Zeit von 0,0006 bis 0,008 Sec. nach der Unterbrechung, ergibt sich derselbe nur von einer solchen Geschwindigkeit, dass man einen Anfangswerth der Polarisation von etwa 2,5 bis 2,6 Daniell zu folgern hätte. Aber ausgeschlossen ist dadurch von vornherein nicht, dass in einer Zeit unmittelbar nach der Unterbrechung, einer Zeit, die noch gegen die kleinste Zwischenzeit von 0,0006 Sec. klein ist, die Polarisation von einem erheblich höheren Werthe abgefallen wäre. Mit dieser Annahme lassen sich aber kaum solche Versuchsreihen vereinigen, wie die in Tabelle V, p. 217 meiner Arbeit mitgetheilten. Dort wurde die electromotorische Kraft der polarisirenden Batterie successive gesteigert von 2,6 bis 6,8 Daniell. Dabei nahm die Intensität des des polarisirenden Stromes von 0,001 bis auf 0,4 Amp. zu. Die Polarisation ergab sich bei allen Versuchen nahe gleich 2,2 bis 2,3 Daniell. Es ist höchst unwahrscheinlich, dass die Polarisation *vor* der Unterbrechung bei den grösseren Intensitäten grösser gewesen sei, als bei den kleineren; während ihr Werth, wie er bei mir zur Messung kam, sich constant ergibt. Wenn auch nach der Unterbrechung die Polarisation sehr schnell abnähme, so muss man doch erwarten, dass der von mir gemessene Werth in demselben Sinne eine Abhängigkeit von der Intensität zeigte, wie die wirklich während der Electrolyse stattfindende Polarisation. Ihr Werth, wie ihn meine Methode ergibt, zeigt nun in jenem Bereiche *keine* Zunahme mit steigender Intensität; also ist eine solche auch für die Polarisation während der Electrolyse *nicht* anzunehmen. Da nun ferner die Polarisation kleiner als die electromotorische Kraft der polarisirenden Batterie sein

muss, diese aber mit dem kleinsten Werthe von 2,6 Daniell beginnt, so muss man annehmen, dass auch bei den grösseren Intensitäten die Polarisation *vor* der Unterbrechung nicht grösser als 2,6 Daniell gewesen sein kann.

Von dem Abfall der Polarisation nach Unterbrechung des polarisirenden Stromes ist wohl zu unterscheiden das momentane Verschwinden desjenigen Theiles der Potentialdifferenz, welcher durch das Product aus Widerstand und Intensität gegeben ist und zwischen einer Electrode und irgend einem dritten in die Flüssigkeit tauchenden Hilfsdrahte neben der Polarisation besteht, solange der Strom dauert. Das momentane Verschwinden *dieses* Theiles der Potentialdifferenz würde allein schon genügen zur Erklärung der Zuckungen der Electrometernadel, welche die Hrn. Koch und Wüllner bei Aenderungen der Stromstärke und schnellem Umlegen eines Commutators beobachtet haben.<sup>1)</sup>

Weiterhin sagen die Hrn. Koch und Wüllner: „Hr. Richarz gibt indessen den beobachteten Erscheinungen nicht nur eine andere Deutung wie die früheren Beobachter, sondern seine Resultate stehen auch mit den früheren Beobachtungen in einem thatsächlichen Widerspruch. Hr. Fromme findet unter Annahme eines constanten Widerstandes ein Wachsen der Polarisation mit zunehmender Stromstärke, d. h. bei zunehmender electromotorischer Kraft wächst die Stromstärke langsamer, als es einem constanten Werthe der Polarisation entspricht; Hr. Richarz dagegen findet unter der Annahme einer constanten Polarisation mit wachsender electromotorischer Kraft einen abnehmenden Widerstand in der Zersetzungszone, d. h. also, der Strom wächst mit zunehmender electromotorischer Kraft so, wie wenn bei constantem Widerstande die Polarisation abnähme.“

Was zunächst die Versuche des ersten Theiles meiner Arbeit betrifft, in welchem ich Messungen der Intensität im geschlossenen Stromkreise während der Electrolyse angestellt habe, so stehen diese Messungen selbst in voller Uebereinstimmung mit denjenigen von Buff und Hrn. Fromme. In derselben Weise berechnet, wie von diesen, liefern meine

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 476.



Versuche auch nahe dieselben Werthe der Polarisation, welche diese fanden. Auf diese thatsächliche Uebereinstimmung habe ich in meiner Arbeit auf p. 67, 74 und 80 hingewiesen. Die Abweichung besteht erst darin, dass ich zu dem Schlusse komme, dass jene Berechnungsweise unzulässig ist.

Die Polarisationsbestimmungen des dritten Theiles meiner Arbeit sind stets begleitet gewesen von gleichzeitigen Messungen der Intensität des polarisirenden Stromes, sodass auch diese in derselben Weise wie die Versuche von Buff und Hrn. Fromme berechnet werden können. Dies ist z. B. für eine Serie von Versuchsreihen auf p. 219 meiner Arbeit geschehen, und das Resultat zeigt wieder, dass die Intensitätsmessungen in voller Uebereinstimmung mit denjenigen von Buff und Fromme stehen.

Ein thatsächlicher Widerspruch meiner und früherer Beobachtungen existirt also nicht. Die entgegengesetzte Ansicht der Hrn. Koch und Wüllner klärt sich in folgender Weise auf. Hr. Fromme schaltet in den Stromkreis der Reihe nach die Rheostatenwiderstände  $w_1, w_2, w_3 \dots$  ein und findet die zugehörigen Stromstärken  $i_1, i_2, i_3 \dots$ . Unter Voraussetzung *constanten* Widerstandes der Zelle und *constanter* Polarisation berechnet Hr. Fromme aus zwei aufeinanderfolgenden Paaren von Werthen,  $w_1, i_1$  und  $w_2, i_2$ , den Widerstand der Zelle und die Polarisation. Wenn Hr. Fromme dies Verfahren für ein anderes Werthepaar, z. B.  $w_2, i_2$  und  $w_3, i_3$ , wiederholt, so erhält er im allgemeinen *andere* Werthe des Widerstandes und der Polarisation, und zwar findet Hr. Fromme *mit zunehmender Stromstärke abnehmenden Widerstand und wachsende Polarisation*. Die Abnahme des Widerstandes tritt besonders hervor in den Versuchen 3, 4, 13, 14, 18 der Tabelle IV des Hrn. Fromme.<sup>1)</sup> Weshalb bei meinen analogen Versuchen die Abnahme des Widerstandes noch stärker hervortritt als bei Hrn. Fromme, habe ich früher auseinandergesetzt.<sup>2)</sup>

Der vermeintliche thatsächliche Widerspruch löst sich also dahin auf, dass die Hrn. Koch und Wüllner das Verhalten des Widerstandes bei Hrn. Fromme aus den Voraussetzungen

1) Fromme, Wied. Ann. 33. p. 93. 1888.

2) Richarz, l. c. p. 78.

das Verhalten der Polarisation aber aus den Resultaten entnehmen, während letztere mit ersteren unvereinbar sind.

### III.

Die Hrn. Koch und Wüllner selbst haben nun folgende Messungen angestellt. Anode  $\alpha$  und Kathode  $\kappa$  aus Platindraht befinden sich in Bechergläsern  $a$  und  $k$ , die durch eine U-Röhre verbunden sind. Die Gefässe  $a$  und  $k$  können abwechselnd durch Heber und zwischengeschaltete Bechergläser mit einem Gefässe  $e$  verbunden werden, welches eine mit dem Electrometer verbundene Platinplatte  $\varepsilon$  enthält. Während des Stromdurchganges wurde gemessen die Stromstärke  $i$ ; electrometrisch die Potentialdifferenz von Anode und Kathode gegeneinander  $D$ , und bei Verbindung der Gefässe  $a$  und  $e$  die Potentialdifferenz  $\alpha$  gegen  $\varepsilon$ , bez. bei Verbindung von  $k$  und  $e$  die Potentialdifferenz  $\kappa$  gegen  $\varepsilon$ . Die Summe der Potentialdifferenzen  $\alpha$  gegen  $\varepsilon$  und  $\kappa$  gegen  $\varepsilon$  wird mit  $p$  bezeichnet. Es findet sich, dass mit hinreichender Annäherung

$$p = \pi + u \cdot i$$

gesetzt werden kann, wo  $\pi$  und  $u$  von  $i$  unabhängig sind.  $\pi$  soll dann die electromotorische Gegenkraft der Polarisation sein;  $u$  wird Uebergangswiderstand genannt.

Was zunächst die Berechnung der Constanten  $\pi$  und  $u$  aus den Beobachtungen betrifft, so bemerken die Hrn. Koch und Wüllner selbst die Unsicherheit der Berechnung für gewisse Fälle. Die zu Grunde liegende Gleichung lautet

$$(b) \quad p = \pi + a(D - p),$$

wo eine Constante  $a$  an Stelle von  $u$  eingeführt ist. Diese Gleichung wird umgeformt, indem

$$(c) \quad p = R + S D$$

gesetzt wird. Daraus folgt dann

$$(d) \quad \pi = \frac{R}{1 - S}.$$

„Die Umformung wurde vorgenommen, weil in der Gleichung (b) auf der rechten Seite die Differenz zweier beobachteten Werthe steht, die zuweilen recht klein ist, somit durch selbst kleine Beobachtungsfehler sehr erheblich beeinflusst werden kann.“<sup>1)</sup>

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 500.

Durch Umformung kann eine thatsächliche Unsicherheit nicht beseitigt werden; in vorliegendem Falle tritt die Unsicherheit ein, wenn die Veränderlichen  $p$  und  $D$  nahe gleich sind; dann muss aber nach (c)  $R$  klein sein gegen  $D$ , und  $S$  nahe gleich 1 werden; letzteres zeigt, in welcher Form die Unsicherheit in (d) übergegangen ist.

Wenn nun die Berechnung der Constanten  $\pi$  und  $\alpha$  aus den Beobachtungen unsicher ist, so heisst das mit anderen Worten: die Beobachtungen von  $p$  und  $D$  lassen sich innerhalb der Grenzen ihrer Sicherheit wiedergeben durch Werthe-paare der Constanten  $\pi$  und  $\alpha$ , welche innerhalb ziemlich weiter Grenzen schwanken können. Für die Messungen an 0,5 mm langen Drähten in 1 Proc. Säure geben die Hrn. Koch und Wüllner selbst solche weit verschiedene Werthe an.<sup>1)</sup>

Die Werthe für die Constante  $\pi$  aus den verschiedenen Versuchsreihen liegen zwischen 3,17 und 4,24 Volt.<sup>2)</sup>

Die Constante  $\pi$  wird dann weiterhin als die electromotorische Kraft der Polarisation, die Constante  $\alpha$  als ein „Uebergangswiderstand“ gedeutet; letzterer hervorgerufen durch eine schlecht leitende Schicht, mit welcher sich die Electroden infolge des Stromdurchganges bedecken sollen.<sup>3)</sup> Es lässt sich zeigen, dass der „Uebergangswiderstand“ im wesentlichen der Widerstand im gewöhnlichen Sinne ist, welchen die Flüssigkeit dem Strome bei seiner Verbreitung von den Electroden  $\alpha$  und  $\pi$  aus entgegensetzt.

Dieser Ausbreitungswiderstand muss bei sehr kleinen Electroden einen erheblichen Werth erreichen. Unter vereinfachenden Annahmen ist derselbe zu berechnen.

Zunächst ist die Ausbreitung von einer einzelnen Electrode aus zu betrachten. Jede Electrode hat die Form eines Kreiscylinders, dessen Mantel von einer bestimmten Höhe ab in Glas eingeschmolzen ist. Der Strom tritt also erstens durch die Mantelfläche, und zweitens durch die freie Endfläche in die Flüssigkeit aus. Denken wir uns durch den Electrolyten eine Ebene gelegt, welche die freie kreisförmige

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 501.

2) Koch u. Wüllner, l. c. p. 501, 502.

3) Koch u. Wüllner, l. c. p. 478.

Endfläche der Electrode in sich aufnimmt. Der Theil dieser Ebene ausserhalb der Electrodenfläche werde als nichtleitend gedacht, sodass der Electrolyt in zwei von einander isolirte Theile getheilt ist. Dann tritt der Strom theils radial durch die Mantelfläche des Cylinders in den *einen* Theil, theils durch die freie Endfläche in den *anderen*, von jenem isolirten Theil der Flüssigkeit aus. Wir berechnen den Widerstand jedes einzelnen dieser beiden Zweige, und fügen sie dann durch Nebeneinanderschaltung zusammen.

Strömt die Electricität aus dem Mantel eines Cylinders vom Radius  $r$  radial aus, so ist der Widerstand eines Hohlcyllinders der Flüssigkeit bis zu einem äusseren Radius  $R$ :

$$w = \frac{\log \text{nat} \frac{R}{r}}{2 \pi h \lambda} \cdot \frac{0,941}{1000} \text{ Ohm,}$$

wo  $h$  die Höhe des durchströmten Hohlcyllinders, entsprechend der Länge der drahtförmigen Electrode, in Millimetern;  $\lambda$  die Leitungsfähigkeit, bezogen auf Quecksilber, ist.<sup>1)</sup> Bei den Hrn. Koch und Wüllner handelt es sich um den Widerstand der Flüssigkeit zwischen einer der beiden Electroden  $\alpha$  oder  $\kappa$  einerseits und derjenigen Aequipotentialfläche, welcher die mit dem Electrometer verbundene Platte  $\varepsilon$  angehört, andererseits. Es wird zur Berechnung dieses Widerstandes der Wirklichkeit einigermassen entsprechen, wenn man als jene Aequipotentialfläche eine Cylinderfläche vom Radius der Electrodengefässe  $a$  oder  $k$  annimmt. Derselbe ist  $R = 80$  mm. Die halbe Dicke der Drähte war  $r = 0,05$  mm.

Der Widerstand der Ausbreitung aus den Endflächen ist nach der bekannten Formel von Lord Rayleigh zu berechnen.<sup>1)</sup> Der durch Zusammenfügung der beiden Zweige für *eine* Electrode berechnete Ausbreitungswiderstand tritt in  $p$  doppelt auf, einmal für die Anode und einmal für die Kathode. Unter diesen vereinfachenden Annahmen berechnet sich der in  $p$  auftretende Ausbreitungswiderstand für die Temperatur  $5^\circ$ :

1) F. Kohlrausch, Leitfaden, p. 253. — F. Richarz, l. c. p. 82. Anm. 2.

Lösung	0,5 mm Spitzen	3 mm Spitzen	5 mm Spitzen
1 Proc.	811 Ohm	188 Ohm	113 Ohm
10 "	96,3 "	21,8 "	13,4 "
20 "	58,9 "	13,3 "	8,2 "
30,4 "	53,1 "	12,0 "	7,4 "
42 "	61,2 "	13,8 "	8,5 "

Bei Koch und Wüllner findet sich folgende Tabelle<sup>1)</sup>:

Werthe des Uebergangswiderstandes  $\alpha$ .

Lösung	0,5 mm Spitzen	3 mm Spitzen	5 mm Spitzen
1 Proc.	716 Ohm	174 Ohm	115 Ohm
10 "	84,2 "	20,3 "	13,4 "
20 "	49,9 "	12,1 "	8,0 "
30,4 "	46,0 "	11,2 "	7,4 "
42 "	49,6 "	12,0 "	8,0 "

Die grosse Aehnlichkeit beider Tabellen ist unverkennbar. Vor Stromschluss war die Temperatur bei Koch und Wüllner Null Grad. Die Temperatur von 5° ist so angenommen, dass die berechneten und beobachteten Werthe bei der Lösung vom grössten Leitungsvermögen (30,4 Proc.) und den längsten Electroden gleich werden. Bei diesen Umständen ist die Erwärmung der Säure am geringsten; je kleiner die Electroden sind, und je schlechter die Säure leitet, um so mehr muss sich die Erhitzung durch den Strom geltend machen, welche bei den Flüssigkeitsschichten dicht an der Electrode sehr gross werden muss.<sup>2)</sup> Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen zeigen vollkommen das hiernach zu erwartende Verhalten. Die grösste Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung, welche bei den 0,5 mm Spitzen in 1 Proc. Säure auftritt, würde schon bei der Annahme einer Temperatur von nur 16° verschwinden. Diese Erhitzung macht den Ausbreitungswiderstand auch in erheblichem Maasse von der Stromstärke abhängig, wovon weiter unten noch die Rede sein wird. Die beobachteten Werthe sind daher nur mittlere Werthe eines von der Intensität abhängigen Widerstandes. In Betracht dessen und der vereinfachenden Annahmen, welche gemacht werden mussten, um die Möglichkeit einer angenäherten Berechnung zu gewinnen, ist eine bessere Uebereinstimmung mit der Beobachtung nicht zu erwarten. — Der „Uebergangs-

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 507.

2) Richarz, l. c. p. 83.

widerstand  $u$ “ ist also im wesentlichen der Ausbreitungswiderstand der Flüssigkeit bei der Verbreitung des Stromes von den dünnen Electroden aus.

Ausser dem „Uebergangswiderstand“ berechnen die Hrn. Koch und Wüllner den „Widerstand des Electrolyten“

$$W = \frac{D - p}{i},$$

d. h. den Widerstand, welcher der gesammten Potentialdifferenz der Electroden  $D$  nach Abzug der Gegenkraft der Polarisirung und der durch die Ausbreitungswiderstände verursachten Potentialdifferenz ( $\pi + iu = p$ ) entspricht.  $W$  ergibt sich, von kleinen Differenzen abgesehen, unabhängig von der Electrodengrösse, und im Mittel für

Lösung:	1 Proc.	10 Proc.	20 Proc.	30,4 Proc.	42 Proc.
$W$	269	34	20	18	20 Ohm.

$W$  muss im wesentlichen der Widerstand des U-Rohres von 2,5 cm Durchmesser und 50 cm ganzer Länge sein, welches die beiden Electrodengefässe verbindet. In der That berechnet man aus diesen Dimensionen für 0° folgende Werthe:

Lösung:	1 Proc.	10 Proc.	20 Proc.	30,4 Proc.	42 Proc.
$W$	238	32	20	18	21 Ohm.

Der Widerstand  $W$ , welcher im wesentlichen der 50 cm langen U-Röhre entspricht, und der „Uebergangswiderstand“ zusammengenommen bilden den Widerstand der Zersetzungs- zelle als Ganzes. Bei einer Versuchsanordnung, bei welcher die Electroden sich in *einem* Becherglase befinden, wie bei Hrn. Fromme, oder bei welcher die Electroden sich am unteren Ende einer ganz kurz umgebogenen weiten U-Röhre befinden, wie bei mir, würden analoge Messungen, wie diejenigen der Hrn. Koch und Wüllner, für den Widerstand  $W$  den Werth Null oder nur einen kleinen Werth ergeben. Bei den Versuchen von Hrn. Fromme und den meinigen würde also der gesammte Widerstand der Zersetzungs- zelle nahezu mit dem „Uebergangswiderstand“ übereinstimmen.

Hieraus ist Folgendes zu schliessen. Wenn die Hrn. Koch und Wüllner die Potentialdifferenz  $p$  zerlegen in  $\pi + iu$ , und die *Constante*  $\pi$  als electromotorische Kraft der Polarisirung, die *Constante*  $u$  als „Uebergangswiderstand“ deuten, so steht diese Deutung im Widerspruch mit den Intensitätsmessungen

im geschlossenen Kreise, welche Hr. Fromme und ich angestellt haben. Wie ich früher ausgeführt habe und oben kurz zusammenfassend wiederholte, führen jene Messungen zu dem Resultate, dass von ihren beiden Voraussetzungen: electromotorische Kraft der Polarisation und Widerstand der Zersetzungszelle seien von der Stromstärke unabhängig, bei kleinen Electroden mindestens eine nicht erfüllt ist. Für die Versuchsanordnung von Hrn. Fromme und mir ist nun der Widerstand der Zersetzungszelle, wie oben gezeigt, nahezu gleich dem „Uebergangswiderstand“ von Koch und Wüllner. Also steht die Deutung von electromotorischer Kraft der Polarisation und „Uebergangswiderstand“ als von der Stromstärke unabhängiger Constanten in Widerspruch mit den Resultaten der Intensitätsmessungen von Hrn. Fromme und mir.

Das Resultat, welches die Hrn. Koch und Wüllner aus der analogen mathematischen Zerlegung der Potentialdifferenz  $p$  für Messungen an plattenförmigen Electroden ableiten, stimmt nicht mit den älteren directen Bestimmungen überein. Während diese für das Maximum der electromotorischen Kraft der Polarisation bei geschlossenem Stromkreise einen Werth von etwa 2,6 Daniell = 2,9 Volt ergeben<sup>1)</sup>, leiten Koch und Wüllner für denselben, wie bei den kleinen Electroden, den Werth von 3,8 Volt ab.

Wenn die Abhängigkeit des Widerstandes einer Zelle mit kleinen Electroden von der Stromstärke nicht schon nachgewiesen wäre, so würden die Versuche der Hrn. Koch und Wüllner dazu führen. Ihr Widerstand  $W$  zeigt nämlich bei fast allen Versuchsreihen, welche nicht unregelmässig hin- und herschwankende Werthe liefern, eine auffallende Abnahme bei steigender Intensität. Nun ist gezeigt, dass der „Uebergangswiderstand“ seinem Wesen nach nicht von  $W$  verschieden ist, da beides Widerstände des Electrolyten, nur verschiedener Theile desselben, sind. Man würde also von neuem dazu geführt werden, dass der gesammte Widerstand der Zelle mit wachsender Stromstärke abnehmen muss. Dies ergibt sich auch direct aus der Berechnung bei Koch und Wüllner, p. 506 und 507, wo der „Uebergangswiderstand“  $u$  durch

1) Buff, Pogg. Ann. 73. p. 500. 1848; Wied. Electr. 2. p. 690.



Multiplication des bei steigender Intensität abnehmenden  $W$  mit einem constanten Factor ( $a = \varphi / K$ ) abgeleitet wird. Die Abnahme von  $W$  wird wohl in der Erwärmung ihre Ursache haben; die Hrn. Koch und Wüllner haben eine solche von einigen Graden bei Strömen über 0,5 Amp. auch direct beobachtet.<sup>1)</sup> Hieraus würde sich die Abnahme von  $W$  auch der Grösse nach vollkommen erklären. Wenn nun schon die Flüssigkeit in dem U-Rohr von 2,5 cm Durchmesser sich um einige Grade erwärmt, so müssen die Flüssigkeitsschichten dicht an der kleinen Electrode, welche mit ungleich grösserer Stromdichtigkeit durchflossen werden, auch noch sehr viel stärker erwärmt werden. Hierüber wird weiter unten ausführlicher gesprochen werden.

Da die Methode der Hrn. Koch und Wüllner zur Bestimmung der betreffenden Potentialdifferenzen an und für sich, wie sie direct zur Messung gelangen, durchaus einwurfsfrei ist, war es mir von besonderer Wichtigkeit, nachweisen zu können, dass ihre unmittelbaren Messungen, wie sie vorliegen, mit den Resultaten meiner früheren Versuche nicht in Widerspruch stehen. Aus denselben hatte ich ein Maximum der electromotorischen Kraft der Polarisation von höchstens 2,9 Volt und einen mit steigender Intensität abnehmenden Widerstand gefolgert. Die Potentialdifferenz zwischen Anode und Kathode würde also nach den Schlüssen aus meinen früheren Versuchen in der Form

$$p = 2,9 + iw$$

darstellbar sein, wo  $w$  mit wachsendem  $i$  abnehmen muss. Die Hrn. Koch und Wüllner können nun ihre Messungen von  $p$  mit hinreichender Annäherung in der Form

$$p = a + ib$$

darstellen, wo  $a$  und  $b$  von  $i$  unabhängig sind. Für die Constante  $a$  ergeben die verschiedenen Versuchsreihen, wie oben erwähnt, Werthe von 3,17 bis 4,24 Volt; jedenfalls also Werthe grösser als 2,9; oder es kann gesetzt werden  $a = 2,9 + \alpha$ , wo  $\alpha$  eine positive Grösse ist. Mithin lassen sich die Messungen von Koch und Wüllner in der Form darstellen

$$p = 2,9 + i\left(b + \frac{\alpha}{i}\right).$$

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 481.

Es ist also ersichtlich, dass ihre directen Messungen mit der Annahme einer electromotorischen Kraft der Polarisation von etwa 2,9 Volt und einem bei steigender Intensität abnehmenden Widerstand keineswegs in thatsächlichem Widerspruche stehen, sondern mit derselben verträglich sind.

## IV.

Im zweiten Theile ihrer Arbeit beschreiben die Hrn. Koch und Wüllner eingehende Versuche über eine Erscheinung, welche sie den „Stromumschlag“ nennen. Nach meiner früher ausgesprochenen Ansicht ist die auch von mir und anderen beobachtete Erscheinung dem Leidenfrost'schen Phänomen vergleichbar, indem das Wesentliche eine Dampfhülle ist, welche die Electrode umgibt, und welche um so leichter auftritt, je grösser die Stromdichtigkeit ist. Während aber beim Leidenfrost'schen Phänomen die Erhitzung der Unterlage des Tropfens das erste ist, und die Flüssigkeit von ihrer Unterlage her erwärmt wird, geschieht bei der Erscheinung an Electroden die Wärmeentwicklung in der Grenzschicht der Flüssigkeit selbst, indem diese durch den Strom bis zur Siedetemperatur erhitzt wird. Eine einfache Rechnung ergibt, dass in 50proc. Schwefelsäure die Temperatur der Flüssigkeitsschicht, welche einer Drahtelectrode von 0,08 mm Dicke und 10 mm Länge unmittelbar anliegt, durch den Strom von 1 Amp., abgesehen von Fortführung der Wärme, in  $\frac{1}{7}$  Sec. bis zum Siedepunkt steigt.<sup>1)</sup> Mir war das erwähnte Phänomen von Wichtigkeit als experimenteller Beweis, dass die Temperatur des Electrolyten an Electroden von sehr kleiner Oberfläche bis zum Siedepunkt steigen kann, und ich habe dasselbe zunächst nur im Hinblick hierauf erwähnt<sup>2)</sup> unter Hinweis<sup>3)</sup> auf die spätere ausführliche Beschreibung.<sup>4)</sup> Die meisten der in letzterer wiedergegebenen Erscheinungsformen sind auch von den Hrn. Koch und Wüllner beobachtet worden. Nur einige

1) Richarz, l. c. p. 83.

2) Richarz, l. c. p. 83—85; p. 232—233.

3) Richarz, l. c. p. 84.

4) Richarz, Sitzungsber. d. Niederrhein. Gesellsch. für Natur- und Heilkunde. p. 84. 1890, Sitzung v. 7. Juli. Beibl. 15. p. 596. 1891.

besonders instructive, die ich bei denselben nicht finde, will ich kurz erwähnen.

Das Phänomen ist am leichtesten zu erhalten, wenn man als die eine Electrode ein Platinblech, als die andere einen feinen kurzen Draht der erwähnten Art nimmt, und letzteren vor dem Eintauchen in die Säure mit dem anderen Pol der Batterie verbunden hat. Biegt man feinen Platindraht zu einer etwa 20 mm langen schmalen Oese, die mit beiden Enden um einen dicken Draht gewickelt als die eine Electrode dient, so kann man die Oese bei einer Batterie von 14 Grove bis zu 10 mm Tiefe und mehr in die Säure tauchen, sodass das Phänomen erhalten bleibt; dabei ist deutlich zu erkennen, dass der ganze Zwischenraum zwischen den beiden Seiten der Schlinge mit einer Gasschicht angefüllt ist, besonders durch die totale Reflexion beim seitlichen Betrachten. Auch mit dickeren Platindrähten (etwa 0,3 mm Durchmesser) kann man ähnliche Erscheinungen erhalten; diese Drähte müssen aber vollkommen glatt, und möglichst gerade sein, wenn der abnorme Zustand einigermaassen stabil sein soll. Einen solchen Draht von grösserer Länge als Anode vor dem Eintauchen mit einer Batterie von 14 Groveschen Bechern verbunden, während als Kathode ein Platinblech dient, kann man bis zu 3 cm und mehr vorsichtig eintauchen, sodass der Zustand bestehen bleibt. Dabei ist der Draht von einer Gashülle wie von einem Schlauch umgeben; wo der Draht durch die Oberfläche der Flüssigkeit hindurchgeht, ist dieselbe trichterförmig eingezogen; alles an dieser Electrode abgeschiedene Gas entweicht durch die Dampfhülle, welche den Draht umgibt, in die Höhe, sodass gar keine Blasenentwicklung stattfindet. Sehr eigenthümlich gestaltet sich auch die Erscheinung bei dicken Platindrähten, wenn man dieselben ähnlich wie die Electroden aus feinem Draht bis auf ein kurzes freies Ende in eine Glasröhre einschmilzt. Man kann dann den Zustand bis zu gänzlichem Eintauchen der freien Drahtoberfläche erhalten; die Gashülle, welche dieselbe umgibt, schwillt allmählich an ihrer höchsten Stelle an, bis eine Blase abreisst, was sich in kurzen Zwischräumen wiederholt. Für eine Batterie von 14 Grove kann man bei freien Drahtenden von mehreren Centimetern Länge den beschriebenen Zustand lange Zeit er-

halten; an der Kathode nur bei kürzeren Stücken bis etwa 1 cm Länge. Oft ist das Abreißen einer Blase vom oberen Ende der Gashülle eine genügende Erschütterung, um den eigenthümlichen Zustand zu zerstören und die gewöhnliche Electrolyse bei weit stärkerer Intensität stattfinden zu lassen; bei kürzeren Drahtstücken geht diese dann auch zuweilen von selbst wieder in den abnormen Zustand über.

Die starke Erhitzung der Säure an der Electrode wird, wie ich a. a. O. beschrieben habe, bewiesen durch das Gefühl, durch die als Schliere in lebhaftem Strome emporsteigende stark erhitzte Säure, und durch den weissen Dampf, welcher die entwickelten Gasblasen erfüllt.

Steigert man die Stromstärke bei normaler Electrolyse soweit, dass der Eintritt des Phänomens nahe bevorsteht, so zeigt eine nicht zu träge Galvanometernadel beständige Schwankungen der Intensität <sup>1)</sup>; die den Electroden anliegende Flüssigkeitsschicht wird offenbar schon sehr erhitzt, aber durch die lebhafte Gasentwicklung immer wieder zerstreut; jeder geringfügige Umstand, der die Agitation der Flüssigkeit beeinflusst, muss dabei auch den Widerstand der die Electrode umgebenden Schicht und damit die Intensität erheblich beeinflussen. In geringerem Maasse muss dies auch bei kleineren Stromstärken der Fall sein; am Galvanometer habe ich jene Schwankungen bei kleinen Intensitäten zwar nicht constatiren können, wohl aber durch das beständige Rauschen eines Telephons, welches als Nebenschluss zu der Zelle mit kleinen Electroden angebracht wurde. <sup>2)</sup>

Die nächstliegende Deutung der Erscheinung würde, wie auch die Hrn. Koch und Wüllner meinen <sup>3)</sup>, diejenige sein, dass die infolge der Erhitzung der Flüssigkeit sich bildende Dampfschicht das Wesentliche ist. Aus dieser Deutung ergibt sich in einfacher Weise, weshalb das Phänomen um so leichter auftritt, je grösser die Stromdichtigkeit ist; und damit auch, warum dasselbe besonders leicht beim langsamen Eintauchen einer Electrode auftritt, wie ich a. a. O. eingehen-

1) Richarz, l. c. p. 71. 231. 232.

2) Richarz, l. c. p. 72.

3) Koch u. Wüllner, l. c. p. 772.

der auseinandergesetzt habe. Aber nach Ansicht von Koch und Wüllner würde die Erscheinung durch jene Dampfhülle zwar zum Theil bedingt werden; dieselbe sollte aber doch „nicht das wesentlich Bedingende“ sein.<sup>1)</sup> Sicherlich wird die Erscheinung auch durch andere Processe, welche *neben* der Bildung der Dampfhülle gleichzeitig stattfinden, beeinflusst, so durch die von Hrn. Nahrwold<sup>2)</sup> nachgewiesene Zerstäubung erhitzten Platins, durch die von Hrn. Mac-Leod<sup>3)</sup> gefundene Auflösung von Platinelectroden, und vielleicht auch, wie die Hrn. Koch und Wüllner glauben und näher untersuchen wollen, durch Occlusion der abgeschiedenen Gase.

Berlin, im August 1892.

---

1) Koch u. Wüllner, l. c. p. 774.

2) Nahrwold, Wied. Ann. **31**. p. 467. 1887.

3) Mac Leod, Journ. Chem. Soc. London **49**. p. 591. 1886.

#### IV. *Electrische Schwingungen in Drähten, directe Messung der fortschreitenden Welle; von Kr. Birkeland.*

(Die Resultate sind in einem Vortrage auf der 14. Naturforscherversammlung in Kopenhagen mitgetheilt.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1—6.)

1. Seitdem Prof. Hertz im Jahre 1887<sup>1)</sup> zuerst seine Entdeckungen über electrische Schwingungen veröffentlicht hatte, sind Mittheilungen von neuen Entdeckungen und Untersuchungen erschienen, die jetzt natürlich ein immer mehr specifisch quantitatives Gepräge annehmen.

Die Methoden, welche bis jetzt die besten quantitativen Resultate gegeben haben, sind theils auf thermischen, theils auf mechanischen Einwirkungen der electrischen Wellen basirt gewesen.

Zur Darlegung des oben erwähnten könnte man unter anderen die von folgenden Herren ausgeführten Versuche anführen: Rubens mit Bolometer<sup>2)</sup>, Bjerknes mit Electrometer<sup>3)</sup> und Klemenčič mit Thermoelement.<sup>4)</sup>

Die directe Funkenmessung gibt jedoch in vielen Fällen ein momentanes Bild des electrischen Zustandes, welches oft der Summen-Wirkung vorzuziehen ist, die bei den übrigen Methoden gemessen wird.

Die Funkenmessungen müssen derart sein, dass sich die procentische Sicherheit mit den auf andere Weise erreichten quantitativen Resultaten vergleichen lässt.

Hrn. Blondlot<sup>5)</sup> ist es durch gewisse, neue Anordnungen der Aufstellung in erstaunlichem Grade gelungen, die Funken in dem secundären Leiter zu verlängern. — Er hat somit ohne Zweifel einen sehr wirkungsvollen Apparat für solche Messungen erfunden.

1) Hertz, Wied. Ann. 31.

2) Rubens, Wied. Ann. 42. 1891.

3) Bjerknes, Wied. Ann. 44. 1891.

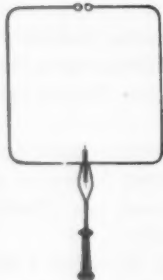
4) Klemenčič, Wied. Ann. 45. 1892.

5) Blondlot, Journ. de phys. 2. série. 1891; Compt. rend. 8 fev. 1892.

Es hat sich indess auch als möglich erwiesen, grosse Genauigkeit in den Funkenmessungen selbst bei *sehr kleinen* Funken zu erreichen, was von grosser Bedeutung ist, im Fall eine vergrösserte Funkenlänge nur so erzielt werden kann, dass die theoretische Einfachheit dadurch leidet.

Das von mir zur Beobachtung der Länge der Funken verwendete Hilfsmittel ist das Telephon, sowohl bei Versuchen, wo secundäre Rahmen benutzt wurden, als auch bei mehr directen Untersuchungen der Wellen vom primären Excitator.

Die Schwingungsdauer und das Dämpfungsverhältniss in einem secundären Rahmen ändert sich nicht um mehr als einige Procente, wenn man in denselben einen kleinen kräftigen Condensator der Funkenstrecke diametral gegenüber stellt. (Siehe nebenstehende Figur.)



Führt man in diesen secundären Rahmen ein Telephon ein, sodass die beiden Condensatorbelege durch dasselbe in metallischer Verbindung stehen, so erweist dieser neue Rahmen in den obenerwähnten Beziehungen keinen beträchtlichen Unterschied von dem alten. Wohl besitzt er aber andere Eigenschaften, die ihn zu einem vorzüglichen Messapparat machen.

Hat man nämlich durch besondere Vorrichtungen die verhältnissmässig langsamen magnetischen Veränderungen in dem Felde möglichst entfernt, die für sich allein Telephongeräusch in einem solchen System hervorbringen würden, und die Leitung so vorgerichtet, dass man nur schnelle Hertz'sche Schwingungen in dem Rahmen bekommt, so lässt sich im Telephon durchaus kein Tönen vernehmen, wenn die Schwingungen auch ausserordentlich kräftig sind. Tritt dagegen in dem Rahmen bei einem passend abgemessenen Abstand zwischen den Polkugeln ein wenn auch noch so kleiner Funke auf, so hört man bei dieser Anordnung immer ein Geräusch im Telephon, und durch besondere Versuche lässt sich dann nachweisen, dass ein Abströmen von Electricität durch die Telephonwindungen ganz anderer Art vor sich geht, als in dem Falle, wo die Polkugeln so



eingestellt waren, dass kein Funke im Mikrometer überging.

Bei meinen Bestrebungen, in die vielen eigenthümlichen Fälle von Tönen im Telephon, die ich wahrgenommen habe, Klarheit zu bringen, ist mir eine Abhandlung von S. Kalischer<sup>1)</sup> „Ueber das Tönen des Telephones“ sehr nützlich gewesen.

3. Es war mein ursprünglicher Plan gewesen, die Resultate der Untersuchungen zuerst zu veröffentlichen, welche ermitteln sollten, wann sich das Tönen im Telephon erwarten lässt und wann nicht, und dann erst die Erklärung der Phänomene vorzulegen, welche aus den Versuchen direct hervorzugehen scheinen, und ferner zu zeigen, wie man die Resultate bei den quantitativen Messungen ausnützen sollte.

Mittlerweile ist vor Kurzem eine Abhandlung von Hrn. A. Perot<sup>2)</sup> erschienen, in welcher einige interessante Messungen der Potentialänderungen längs eines Leitungsdrahtes, in dem „stehende electrische Schwingungen“ erregt sind, mitgetheilt werden.

Die Messungen sind mit einem Funkenmikrometer ausgeführt, und die Aufstellung ist wesentlich dieselbe wie die, die Hr. Blondlot benutzt hat.

Da ich schon seit längerer Zeit mit ähnlichen Versuchen beschäftigt bin und sehr interessante Phänomene wahrgenommen habe, hielt ich es hiernach nöthig, zuerst diese zu veröffentlichen, ehe ich mit der eigentlichen Telephonmethode zu quantitativen Untersuchungen electrischer Schwingungen beginne.

Zwar ist in den im Folgenden beschriebenen Versuchen fast immer ein Telephon benutzt worden, aber stets nur als ein erfahrungsgemäss gutes Hilfsmittel, das, wie man leicht sieht, ausserhalb der theoretischen Behandlung der Phänomene steht.

*Untersuchungen über die electrische Potentiale in einer Metallleitung, in welcher stehende electrische Wellen erregt sind.*

4. Die schönen Entdeckungen stehender electrischer Schwin-

1) Kalischer, Wied. Ann. 41. 1890.

2) Perot, Compt. rend. 25. janvier 1892.

gungen in Drähten von Rubens und Bjerknes (vgl. l. c.) haben mich veranlasst, dieselben Phänomene mit Hilfe von Funkenmessungen zu untersuchen.

Diese Methode hat, wie es scheint, den Vortheil, dass sie ein treues Bild des momentanen Zustandes der Leitung gibt, nicht eine Summenwirkung einer Reihe von Phänomenen, wie bei den übrigen Methoden.

5. *Die Anordnung des primären Leiters mit Collectorplatten und den dazu gehörenden Leitungen* war im Wesentlichen mit der von Sarasin und de la Rive<sup>1)</sup> analog.

Der primäre Leiter bestand aus zwei quadratischen Messingplatten ( $40 \times 40$  cm) mit abgerundeten Kanten, die mit 2 mm dicken Kupferdrähten von verschiedener Länge verbunden waren.

Die Funken, deren Ende symmetrisch im Verhältnisse zu den Capacitäten an den beiden Enden des Leiters sich befindet, springen zwischen zwei Kugeln von 2 cm Durchmesser über, welche leicht zu dem Zwecke der Reinigung herausgenommen werden können; der Abstand zwischen denselben kann nach Belieben abgepasst und in Millimetern abgelesen werden. Die Funkenentladung im primären Leiter wird durch ein grosses Inductorium mit Quecksilberunterbrecher unterhalten, der von zwei Trockenelementen getrieben wird.

Das Inductorium wird von nicht weniger als sechs bis zehn grossen Accumulatoren erregt, weil der Strom zur Verbrauchsstelle durch einen über 100 m langen Draht mit Erdleitung geführt werden muss.

Der primäre Leiter war durch isolirende Mittel an einem etwas über 1 m hohen und 1,5 m langen Holzbock befestigt.

Die Funkenstrecke selbst war von einem hölzernen Kästchen umgeben, sowohl um zu verhindern, dass der Funke durch das Licht einer dicht darüber hängenden Glühlampe geschwächt werde, als um den scharfen Knall der Entladungen zu dämpfen, der bei Telephonmessungen lästig ist.

Den quadratischen Metallplatten im primären Leiter gerade gegenüber stehen zwei Collectorplatten von gleichen Dimensionen, von denen zwei, über 30 m lange Kupferdrähte

1) Sarasin und de la Rive, Arch. de Genève. 23. p. 113. 1890.

von 2 mm Durchmesser parallel in einem Abstände von 80 cm ausgehen.

Das Holzgestell ist so eingerichtet, dass der Abstand zwischen den Plattenpaaren vermindert und auf einer in Centimeter eingetheilten Scala abgelesen werden kann.

Alles muss möglichst gut isolirt werden; da sonst während der Ladung des primären Leiters Electricität durch das Holzgestell in die Collectorplatten übergeht, die dadurch statische Ladungen bekommen.

6. Die 30 m langen Drähte waren geradlinig horizontal ausgespannt und an dem hinteren Ende eines über 15 m langen, doppelten, hölzernen Gestelles befestigt, welches sich längs der Drähte erstreckte.

Auf den zwei parallelen in Decimeter getheilten Holzschienen  $AB$  und  $A'B'$  (vgl. Fig. 1), konnte eine Art von Wagen auf Rädern verschoben werden, der alle Messapparate trug und mit einem Centimeterstabe an jeder Seite versehen war, so dass der Abstand von jedem Punkte des Drahtes bis an das freie Ende desselben in Centimetern genau angegeben werden konnte.

Zur Reinigung der Kugeln bei der *primären Funkenstrecke* habe ich in der Regel Smirgel Nr. 00 benutzt und nachher die Kugeln mit einem Handtuch polirt.

*Die Messapparate; Funkenmikrometer mit Telephon.*

7. Der Wagen  $W$  trug folgende Apparate:

a) einen kleinen Gleitcontact, der mit der Hauptleitung von der einen Collectorplatte immer in Verbindung stand.

b) Ein gutes Funkenmikrometer  $M$ , dessen eine Polkugel durch einen 3 cm langen,  $\frac{1}{10}$  mm dicken Metalldraht mit dem Gleitcontact in Verbindung stand; die andere Polkugel war durch einen anderen 10 cm langen, dünnen Draht mit einer Klemmschraube am Holzgestelle verbunden.

c) ein Telephon, von dem der eine Zuleitungsdraht mit der obengenannten Klemmschraube in Verbindung stand, während der andere mit einer ähnlichen Klemmschraube verbunden war, die durch einen langen, 2 mm starken Kupferdraht mit der Wasserleitung, d. h. mit der Erde in Verbindung stand.

Die lange mit der Erde verbundene Leitung lag frei auf

dem Boden, so dass der Wagen mit Zubehör das lange Gestell auf- und abgeschoben werden konnte, ohne dass die Verbindung aufgehoben wurde.

8. Wenn die Polkugeln des Funkenmikrometers zusammengeschraubt waren, war eine directe metallische Leitung von der Hauptleitung in die Erde hergestellt; waren sie es nicht, so stand nur der Gleitcontact und die eine Polkugel mit dazu gehörender 3 cm langer Leitung mit derselben in Verbindung.

Die Capacität dieser 3 kleinen Stücke schätze ich auf 1 bis 2 cm.

Das Funkenmikrometer, dessen Polkugeln einen Durchmesser von ca. 1 cm hatten, war von besonders guter Construction mit Schlittenführung; jeder Trommeltheil entsprach 0,0025 mm; man konnte daher einen Unterschied der Schlagweite von 0,0005 mm erkennen.

Eine solche Genauigkeit der Funkenmessung ist nothwendig, weil man Funken zwischen 0,0025 mm und 0,025 mm bis auf so kleine Grössen constant halten kann.

Werden die Funken grösser, so ist das schwerer, sodass die procentische Sicherheit bei grossen Funken bis 0,1 mm (ich habe sie nie grösser benutzt) schwerlich so gross wie bei kleinen ist.

Um den Funken des Mikrometers gegen die Einwirkung fremden Lichtes zu schützen, waren die Polkugeln mit einem Käppchen umgeben, das bequem entfernt werden konnte, wenn man die Kugeln reinigen wollte.

Endlich stand auf dem beweglichen Wagen eine Lampe, die die Scaleneintheilung des Mikrometers beleuchtete.

9. Die Reinigung *der Kugeln des Funkenmikrometers* ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden und erfordert grosse Vorsicht.

Ich bin schliesslich wieder darauf zurückgekommen, sie mit dem feinsten Schmirgel, der zu haben ist, zu reinigen und sie nachher mit einem weichen trocknen Pinsel abzuputzen.

Wenn man nur Schmirgel benutzt, bekommt man grosse, aber unstete Funken, sie werden schnell schwächer und sinken nach einiger Zeit auf einen minimalen Werth hinab, sind aber auch hierbei nicht constant und daher weniger brauchbar.

Wenn man dagegen die Kugeln nach der Reinigung leicht

mit einem Pinsel abstreicht, werden vielleicht die Funken nicht ein Drittel so stark; allein sie behalten, *nachdem sie eine kurze Zeit übergegangen sind*, eine ziemlich constante Länge, ohne Zweifel, weil die während der Schmirgelreinigung losgerissenen Metallpartikeln durch den Pinsel entfernt werden.

Wenn die Reinigung recht gut gelungen ist, kann man Funken bekommen, deren Längenunterschiede nicht mehr durch die verwendeten Messungsinstrumente nachgewiesen werden kann, vorausgesetzt, dass die Kraft, die die Funken erregt, constant bleibt.

Putzt man dagegen die Kugeln zu stark, poliert man sie, so werden die Funken sehr klein und inconstant, und zwar wächst dann ihre Länge allmählich.

#### Vorbereitende Versuche.

10. Setzt man das Inductorium in Gang, *zieht aber die Kugeln des primären Leiters so weit aus einander, dass kein Funke überspringen kann*, so ist der electriche Vorgang in Inductorium und dem primären Leiter wie bekannt folgender.

In der inducirenden Spule wächst der Stromintensität  $J$  langsam, erhält sich einige Zeit constant und sinkt danach plötzlich auf Null. — Die dadurch in der secundären Spule erregten electromotorischen Kräfte sind mit  $dJ/dt$  proportional und daher sehr verschieden, indem der Maximalwerth der Ableitung, wenn  $J$  abnimmt, vielfach grösser ist, als wenn  $J$  wächst; dagegen ist der Integralstrom in der secundären Leitung in beiden Fällen gleich gross.

11. Der Abstand zwischen den primären Platten und den Collectorplatten war ca. 40 cm. Das Inductorium vermochte höchstens eine Schlagweite von ca. 8 mm zu geben.

Obgleich auch die Polkugeln des Funkenmikrometers so weit aus einander geschraubt waren, dass unmöglich ein Funke überspringen konnte, so wurde doch, was sich leicht erklären lässt, anhaltendes Geräusch in der Telephonplatte gehört, so oft der Strom im Quecksilberbecher geöffnet wurde.

Werden dagegen die Mikrometerkugeln gegen einander geschraubt, so erhält man in der Regel nur einen überaus kleinen Funken, wenn sich überhaupt einer wahrnehmen lässt, während zur selben Zeit das Tönen im Telephon immer den-

selben Charakter hat, bis es plötzlich, wenn die Polkugeln einander berühren, nicht nur viel kräftiger wird, sondern auch in anderer Weise sich verändert, indem man jetzt die doppelte Zahl von Geräuschen hört; jetzt vernimmt man nämlich das Tönen, sowohl wenn der Strom durch den Quecksilberunterbrecher geöffnet, als wenn er geschlossen wird.

Um diese unbequemen, statischen Wirkungen auf die Apparate zu entfernen, ohne jedoch — wie wir später sehen werden — irgend einen beachtenswerthen Einfluss auf diejenigen electricischen Wellen zu üben, die wir erregen wollen, setzen wir durch einen in verdünnte Schwefelsäure getauchten, baumwollenen Docht die beiden langen Hauptleitungen mit einander in Verbindung dicht bei ihrem Ursprunge von den Collectorplatten (vgl. die Figur). Hierdurch wird das Tönen des Telephons beinahe absolut unhörbar, solange die Polkugeln einander nicht berühren, keine Spur des statischen Funkens ist zu entdecken, und schliesslich ist das Tönen, wenn die Polkugeln einander berühren, sehr kräftig, und hat denselben eigenthümlichen Charakter als zuvor.

Eine solche Brücke, wie die hier genannte, ist natürlich nur nothwendig, so lange die Hauptleitungen frei bei  $E$  endigen; wenn sie metallisch mit einander verbunden sind, ist die Brücke überflüssig, indem die statischen Wirkungen somit verschwunden sind.

Die meisten der im Folgenden beschriebenen Versuche sind an den bei  $E$  freien Enden angestellt worden, weil die theoretische Betrachtung der Resultate so leichter wird.

12. *Wir lassen nunmehr die Funken im primären Leiter übergehen.* Jetzt tritt ein ganz neues Phänomen ein, indem heftige schnelle Schwingungen in dem Leiter vorkommen, so dass die Energie von den primären Platten auf die Collectorplatten theilweise übergeht und einen fortschreitenden Wellenzug längs der 30 m langen Drähte bewirkt.

Untersucht man ferner das Verhältniss in dem Mikrometer und Telephon, so ist das Tönen des Telephons, so lange die Polkugeln weit genug aus einander geschraubt sind, wenigstens ebenso schwach wie zuvor — fast unhörbar; nähert man aber die Kugeln gegen einander, so springen von einem bestimmten Punkte an stetige Funken über und ein deutliches

Tönen wird im Telephone gehört, das, wenn die Kugeln einander berühren, kräftiger wird und seinen Charakter völlig verändert.

Ogleich sowohl die Funken, die man jetzt in dem Mikrometer misst, vielfach länger sind als zuvor — da die primären Funken *nicht* übersprangen, und keine Brücke benutzt wurde, — so wird jetzt dennoch kein Tönen in dem Telephone gehört, wenn kein Funke in dem Mikrometer überspringt, während damals starkes Geknister in der Telephonplatte gehört wurde.

Dieses Phänomen ist in derselben Weise wie das entsprechende Phänomen, das bei den in Art. 2 erwähnten secundären Rahmen auftritt, zu erklären. In einer späteren Abhandlung werde ich dieses Verhältniss erörtern.

13. Jetzt ist indess das Verfahren bei der Funkenmessung gegeben.

Nachdem man vorerst die Kugeln des Mikrometers in der oben erwähnten Weise geputzt hat, lässt man die Funken eine kurze Zeit überspringen. Dann bleibt der Abstand, wenn man die Polkugeln gegeneinander schraubt und die beiden Stellungen, wo die Funken hörbar werden, und wo der Contact eintritt, abliest, bei aufeinander folgenden Messungen ziemlich constant.

Dass wirklich das Tönen in dem Telephone eben in dem Augenblick, wo der Contact zwischen den Kugeln des Mikrometers eintritt, den Charakter ändert, habe ich auf mehrere Weisen untersucht.

So verschwinden in einem dunkeln Raume die Funken, sobald das Tönen im Telephone den Contact angibt.

Wenn man ferner die *neu geputzten* Polkugeln des Funkenmikrometers mit dem entsprechenden Pole eines electrischen Elementes verbindet und dann ein Galvanometer in die Leitung einführt, so wird der Strom bei eben derselben Ablesung der Trommeleintheilung geschlossen, wo früher das Telephontönen den Charakter veränderte.

Wenn man eine Zeit lang Funken gemessen hat, geht dieser „Nullpunkt  $q$ “ vielleicht wegen Oxydation langsam zurück, sodass ein gewisser Druck nöthig ist um den Contact herzustellen.

So oft diese Verschiebung des Nullpunktes bis zu 0,0015 mm gewachsen war, pflegte ich die Mikrometerkugeln ein wenig



zu drehen, sodass die Funken auf einer anderen Stelle als zuvor übersprangen.

14. Wir haben in dem Vorhergehenden gesehen, dass man durch einen in verdünnte Schwefelsäure getauchten baumwollenen Docht die statischen Wirkungen der Entladungen bei dem primären Leiter beseitigen kann.

Es ist zu untersuchen, welche Wirkungen eine solche Brücke von grossem Widerstande auf die fortschreitenden Wellen der Hauptleitungen hat.

Man findet, dass der Verlust, der dadurch bewirkt wird, dass ein Theil der Wellen durch die Brücke übergeht, sich nicht messen lässt, wenn der Widerstand der Brücke gross genug ist. — Zu den Versuchen benutzte ich einen ca. 1 m langen, 1 cm breiten baumwollenen Docht, der in verdünnte, ca. 20 proc.  $H_2SO_4$  enthaltende Säure getaucht wurde.

Erstens behält der irgendwo durch das Telephon gemessene Funke, wenn man die Brücke in verschiedene Abstände von den Collectorplatten verschiebt, eine unveränderte Länge.

Wenn man endlich durch schlechte Isolation dafür gesorgt hat, dass sich der statische Funke, wenn die Brücke weggenommen ist, nicht messen lässt, so sind die Funkenlängen, die man als Wirkungen der electricischen Schwingungen im Drahte findet, einmal mit Brücke und Telephon, das andere Mal ohne Brücke und bei Beobachtung der Stellen, wo der Funke beginnt und wo er aufhört, in beiden Fällen dieselben.

Ueberhaupt hat sich ergeben, dass die nicht zu vermeidenden Fehlerquellen, nämlich: die Wirkung einer verschiedenen Reinigung der Mikrometerkugeln, statische Wirkungen der Entladungen, Ablesungsfehler bei dem Funkenmikrometer etc. alle eine untergeordnete Bedeutung haben im Vergleiche mit der Fehlerquelle, die in der Unstetigkeit der Funkenwirksamkeit der primären Funkenstrecke liegt.

15. Vorläufig wollen wir nunmehr den electricischen Zustand längs einer der Hauptleitungen untersuchen, indem wir nur die eventuellen Minima in derselben Weise wie bei den gewöhnlichen Bestimmungen der Wellenlängen bei secundären Stromkreisen zu ermitteln suchen.

Verschiebt man den Wagen von dem freien hinteren Ende gegen den primären Leiter hin, springen die Funken bei  $E$ ,

mit einer passend kleinen Schlagweite in dem Funkenmikrometer, constant und kräftig über, weiter vorn auf der Leitung verschwinden sie, dann aber, wenn der Wagen noch ein Stück vorwärts geschoben wird, erscheinen sie ebenso constant wie zuvor wieder. — Dies wiederholt sich in bestimmten Zwischenräumen.

Dieses periodische Verschwinden der Funken ist leicht wahrzunehmen, wenn man eine Funkenlänge wählt, die beträchtlich grösser als die Funkenlänge in dem Minimumpunkt ist; hierdurch bekommt man zwar lange Intervalle, wo das Telephon schweigt, aber das Phänomen wird sehr deutlich.

Bei Wiederholung der Versuche kommt man zu dem auf den ersten Blick auffälligen Resultat, dass der Abstand zwischen je zwei Minima nicht gleich gross ist; so fanden sich z. B. bei einem primären Leiter für die Minimumspunkte folgende Bestimmungen:

- |            |          |                   |
|------------|----------|-------------------|
| 1. Minimum | — 2,43 m | (5 Beobachtungen) |
| 2. „       | — 5,80 „ | (3 „ )            |
| 3. „       | — 9,90 „ | (4 „ )            |

Ein viertes Minimum wurde zuweilen bei 13,7 m wahrgenommen, zuweilen war es verschwunden. — Die Abstände sind von dem freien Ende *E* gerechnet.

Vorausgesetzt, dass die Reflexion der Wellen am freien Ende des Drahtes ohne Phasenverlust vor sich geht, was, wie wir sehen werden, ziemlich annähernd stattfindet, wird also:

- |              |          |          |
|--------------|----------|----------|
| 1. Halbwelle | 2. Welle | 3. Welle |
| 2,43 m       | 3,37 m   | 4,1 m    |

lang. Die wirkliche Wellenlänge beträgt 3,93 m.

Das erste Minimum ist hier so bestimmt, dass die Strecke wo das Telephon schwieg 1,8 m war. Die Lage der Minima wurde etwas geändert, wenn man das Funkenmikrometer so einstellt, dass die Strecke grösser oder kleiner wird.

Wir werden später, wenn wir die Messungen der Funkenlänge für jedes Drittel eines Meters längs der Leitung graphisch darstellen, die Erklärung dieser Anomalie erhalten; sie rührt wesentlich von der Dämpfung in dem fortschreitenden Wellenzuge her.

16. Bei primären Leitern von verschiedenen Dimensionen wurden die Minima der Hauptleitung verrückt.

Ich habe auf diese Weise Wellenlängen von ca. 2 m bis über 6 m gemessen.

Man erhält einen sehr brauchbaren Werth für die Wellenlänge, wenn man z. B. in der hier angegebenen Weise den Abstand des vierten Knotens von  $E$  bestimmen kann und ihn dann mit 3,5 dividirt.

Die im Vorhergehenden beschriebenen Knotenbestimmungen sind mit einem Abstände von 40 cm zwischen den primären Platten und den Collectorplatten ausgeführt worden.

Einige Versuche wurden auch mit kleineren Abständen zwischen den Plattenpaaren ausgeführt.

Hierbei verschwand ausser dem vierten Minimum auch zuweilen das dritte und man konnte die Wellenform so weit von  $E$  nicht constatiren. —

In der Nähe des freien Endes der Leitung konnten die Knoten ziemlich leicht nachgewiesen werden; und zwar scheint es, den ausgeführten Messungen nach, als ob die Wellenlänge nicht beträchtlich von dem Abstände der Plattenpaare abhängt, was zuerst Hr. V. Bjerknes besprochen hat.

17. Um zu untersuchen, ob der Leitungsdraht zwischen dem Gleitcontact und der einen Mikrometerkugel (vgl. Art. 7) für die Resultate eine wesentliche Bedeutung hat, wurde ausser dem 3 cm langen, sehr dünnen Draht einmal ein 15 cm, ein anderes Mal ein 65 cm langer Draht benutzt. Die Messungen wurden zwar hierdurch undeutlicher und gleichsam verwischt, übrigens wurden aber dieselben ersten Minima gefunden. —

Die Länge der Erdleitung von der anderen Mikrometerkugel zu der Wasserleitung hatte keinen merkbaren Einfluss; ein in dieselbe eingeführter Widerstand bewirkte keine Aenderung der Resultate.

Die gemessenen Wellenlängen hängen also nur von der Schwingungsdauer des primären Leiters ab, und wir werden sehen, dass die stattfindenden Abweichungen von der Aequidistanz der Minima sich aus der vollständigen graphischen Abbildung des electrischen Zustandes längs der Hauptleitung werden herleiten lassen.

*Hauptversuche. Graphische Darstellung des maximalen electrischen Potentials längs der Leitung.*

18. Für eine systematischere und genauere Untersuchung

des electrischen Zustandes längs der Hauptleitung wurden die Schlagweiten im Mikrometer nacheinander an 48 bestimmten Beobachtungsstellen des Drahtes wiederholt gemessen.

Die erste Stelle lag 43 cm von dem freien Ende der Leitung, die nachfolgenden Stellen waren 30 cm voneinander entfernt. Der Kürze halber numeriren wir diese Beobachtungsstellen 1, 2, 3 etc.

Weil jede einzelne Beobachtungsreihe eine beträchtliche Zeit erforderte, traten fast immer — selbst bei den gut gelungenen Reihen —, plötzlich Veränderungen ein, die keine Relation zum Abstände von  $E$  hatten. Wenn z. B. das Mikrometer mit einem bestimmten Punkte der Leitung in Contact stand und dieselbe Schlagweite mehrmals abgelesen worden war, konnte diese plötzlich ihren Werth ändern, den neuen Werth auf kürzere oder längere Zeit behalten, um darauf vielleicht ebenso plötzlich auf den ursprünglichen Werth zurückzukommen.

Diese plötzlichlichen Veränderungen wurden ohne Zweifel durch Unregelmässigkeiten in der Funktion des primären Leiters verursacht; denn gleichzeitig mit den abrupten Aenderungen liessen sich bei der primären Funkenstrecke plötzlich Aenderungen der Explosionen erkennen.

Trotz dieser Schwierigkeiten wurden mehrere Reihen in der erwähnten Weise ausgeführt. Die am besten gelungene vollständige Reihe befindet sich in der ersten Columnne Tabelle I und ist Figur 2 graphisch dargestellt, indem der Abstand von  $E$  in Meter als Abscisse und das jeder Schlagweite entsprechende Potential als Ordinate verrechnet ist.

Die metallische Leitung zwischen den primären Platten war bei dieser Reihe 1.33 m lang, die Schlagweite ca. 2 mm und der Abstand zwischen den primären Platten und den Collectorplatten 40 cm.

Beim ersten Anblick der Figur fallen die geradlinigen Parthien an den Stellen der Wellenthäler auf.

Bei dieser Reihe liegen die drei letzten geradlinigen Strecken in einer Höhe über der  $x$ -Achse, während der Boden des ersten Thales sich etwas höher befindet.

Bei den übrigen Reihen war eine solche Regelmässigkeit selten; jedoch bekam man bei allen den Eindruck, dass, wenn

die abrupten Veränderungen zu vermeiden wären, die niedrigsten Partien der Curven alle in einer Höhe liegen würden.

Um dieses Verhältniss näher zu untersuchen, wurden dann mehrere Reihen von Messungen der Schlagweiten aller Minima ausgeführt. Die unten aufgeführte Reihe bestätigt die oben erwähnte Ansicht.

Die Schlagweiten sind in Trommeltheilen angeführt, deren jeder 2,5 Mikron entspricht.

1. Min.	2. Min.	3. Min.	4. Min.
5,6	5,6	5,5	5,6
5,5	5,7	5,6	—
—	5,5	5,0	5,6
5,7	5,8	5,7	—

Die Zahlen geben an, in welcher Reihenfolge die Messungen ausgeführt wurden.

19. Demnach lässt sich die vollständige Beobachtungsreihe bequem in kleinere Abschnitte eintheilen; so ist die Länge von 14 m in Viertel getheilt, und für jeden Abschnitt sind die Beobachtungen in einer Anzahl von fünf Reihen vor- und rückwärts ausgeführt.

Nachher werden alle den Schlagweiten entsprechenden Potentiale innerhalb jedes Abschnittes auf einen gemeinsamen Minimalwerth proportional reduzirt.

In der unten aufgestellten Tabelle ist die letzte Zahlreihe jedes einzelnen Abschnittes fett gedruckt.

Die fünf letzten zusammengehörenden Reihen (Tab. I) sind mit demselben primären Leiter ausgeführt wie die erste Reihe, nur ist der Abstand zwischen den Plattenpaaren 30 cm und die Funkenlänge 3 mm.

20. Weil die Schlagweiten in Tabelle I zwischen 3 und 25 Trommeltheilen liegen, so können die von verschiedenen Physikern über das Verhältniss zwischen Schlagweiten und dazu gehörenden Potentialen aufgestellten Tabellen hiermit nicht verglichen werden. Nur eine von Thomson umfasst ganz kleine Schlagweiten von 25 Mikron an; der nächstfolgende Werth ist ca. 50 Mikron; selbst diese Tabelle genügt aber natürlich nicht bei solchen Untersuchungen, wo die Funkenlängen so klein sind wie in Tabelle I.

Tabelle I.

Observationsstellen	Schlagweiten	Entsprech. Potentiale	Schlagweiten					Mittlere Werthe <sup>1)</sup>	Entsprech. Potentiale	a. gemeinsamen Minimalwerth red.
1	10,2	20,4	23,0	17,2	18,0	19,0	18,2	19,1	27,6	27,6
2	9,0	19,3	21,0	15,5	16,2	16,0	16,5	17,0	26,0	26,0
3	7,4	17,7	16,0	13,0	12,9	13,8	12,8	13,7	23,4	23,4
4	6,9	17,2	13,0	10,0	10,0	11,0	10,6	10,9	21,0	21,0
5	4,4	14,3	11,0	7,8	8,0	8,0	8,0	8,6	18,9	18,9
6	3,4	12,8	10,0	6,6	6,8	6,5	6,7	7,3	17,6	17,6
7	3,7	13,4	11,3	7,7	7,6	7,3	7,5	8,3	18,6	18,6
8	4,1	13,9	<b>12,2</b>	<b>8,2</b>	<b>8,7</b>	<b>7,8</b>	<b>8,0</b>	<b>9,0</b>	<b>19,3</b>	19,3
9	5,8	15,5	8,9	7,6	7,8	7,8	10,2	8,5	18,8	18,9
10	5,4	15,6	9,8	8,0	8,4	8,8	11,5	9,3	19,6	19,7
11	5,6	15,8	11,0	10,4	10,9	10,2	12,0	10,9	21,0	21,1
12	5,4	15,6	12,0	12,0	11,2	11,8	13,7	12,1	22,1	22,2
13	5,8	16,1	11,0	11,0	10,8	11,1	13,0	11,4	21,4	21,5
14	5,6	15,8	8,7	9,8	10,0	10,0	11,0	9,9	20,2	20,3
15	4,3	14,1	8,0	9,1	8,5	8,2	9,4	8,6	18,9	19,0
16	3,5	13,0	7,0	8,0	7,0	7,1	8,8	7,6	17,9	18,0
17	3,1	12,4	7,1	7,0	<b>7,2</b>	<b>7,3</b>	8,0	7,2	17,5	17,6
18	2,8	11,7	7,0	7,0	7,0	7,2	8,2	7,3	17,6	17,6
19	2,9	12,0	<b>7,0</b>	<b>7,0</b>	<b>7,0</b>	<b>7,0</b>	<b>8,0</b>	<b>7,2</b>	<b>17,5</b>	17,6
20	2,8	11,7	8,1	9,2	7,4	7,7	7,8	8,0	18,3	17,6
21	2,9	12,0	8,0	9,2	7,6	7,6	7,8	8,0	18,3	17,6
22	4,0	13,8	8,0	9,5	7,6	7,6	7,8	8,1	18,4	17,7
23	4,7	14,7	9,5	10,8	8,3	9,0	8,9	9,3	19,6	18,8
24	5,0	15,1	10,1	11,3	9,8	9,5	9,7	10,1	20,3	19,~
25	5,0	15,1	10,5	11,5	10,3	10,0	10,3	10,5	20,7	19,9
26	4,5	14,4	9,0	10,5	9,4	8,6	8,8	9,3	19,6	18,8
27	3,5	13,0	8,0	8,8	7,6	7,6	7,9	8,0	18,3	17,6
28	3,4	12,8	8,0	8,5	7,5	7,6	7,8	7,9	18,2	17,6
29	3,0	12,2	8,0	8,8	7,5	7,6	7,8	8,0	18,3	17,6
30	3,0	12,2	<b>8,1</b>	<b>8,8</b>	<b>7,5</b>	<b>7,4</b>	<b>7,8</b>	<b>8,0</b>	<b>18,3</b>	17,6
31	2,8	11,7	8,2	8,3	7,4	11,5	9,0	8,9	19,2	17,6
32	2,9	12,0	8,2	8,3	7,5	12,0	8,8	9,0	19,3	17,6
33	2,9	12,0	8,1	8,4	7,3	12,0	9,0	9,0	19,3	17,6
34	2,8	11,7	8,2	8,4	7,4	12,0	9,2	9,0	19,3	17,6
35	3,0	12,2	8,0	8,4	7,3	12,5	9,0	9,0	19,3	17,6
36	3,4	12,8	8,0	8,5	7,3	12,0	8,6	8,9	19,2	17,6
37	3,8	13,5	8,0	8,4	7,2	12,5	9,0	9,0	19,3	17,6
38	4,4	14,3	9,3	8,8	7,4	12,0	9,3	9,4	19,6	17,9
39	3,7	13,4	8,5	8,2	7,5	12,0	9,0	9,0	19,3	17,6
40	3,6	13,2	7,6	8,2	7,3	<b>12,0</b>	9,0	<b>8,8</b>	<b>19,1</b>	17,6
41	3,2	12,5	7,2	8,3	7,2	10,5	8,8	8,4	18,7	17,6
42	2,9	12,0	7,2	8,3	7,2	10,5	8,8	8,4	18,7	17,6
43	3,2	12,5	7,3	8,3	7,3	10,5	9,0	8,5	18,8	17,6
44	2,8	11,7	7,2	8,3	7,5	11,0	9,3	8,7	19,0	17,6
45	2,8	11,7	7,2	8,3	7,5	11,0	9,2	8,6	19,0	17,6
46	2,9	12,0	7,3	8,2	7,3	10,5	9,0	8,5	18,8	17,6
47	2,8	11,7	7,2	8,2	7,3	10,5	9,5	8,5	18,8	17,6
48	2,9	12,0	7,2	8,0	7,4	11,0	9,0	8,5	18,8	17,6

1) Richtiger wäre es, die mittleren Werthe der den Schlagweiten gehörenden Potentiale zu nehmen, allein der Fehler wird hier äusserst gering.

Ausserdem ist es nicht a priori sicher, dass die Schlagweite, die einem gewissen Potentialunterschied zwischen den Polkugeln entspricht, von der Zeit unabhängig ist, in welcher sich die Ladung in denselben erhält; man muss sich erinnern, dass die Zeit, während welcher die Ladung hier in der Nähe ihres grössten Werthes bleibt, nach Bruchtheilen von hundert-milliontel Secunden zu rechnen ist.

Die Kraft, um die Luftschicht zu durchbrechen, ist wohl in diesem Falle eine grössere, als die für die Entladung zwischen relativ langsam geladenen Leitern.

Durch besondere Versuche habe ich daher eine Funkentabelle aufgestellt, welche jedenfalls das Verhältniss zwischen den den Schlagweiten entsprechenden Potentialdifferenzen gibt. Nimmt man dann vorläufig an, dass die mittels des Funkenmikrometers gemessene maximale Potentialdifferenz mit dem grössten Potentiale der Contactstelle der Hauptleitung proportional ist<sup>1)</sup>, so werden folglich die in der Rubrik „Entsprechende Potentiale“ aufgeführten Zahlen bis auf einen Proportionalitätsfactor die Potentiale der Beobachtungsstellen längs der Hauptleitung sein.

Die zur Darstellung der Funkentabelle angewendete Methode sowie die Versuche mit den erfolgten Resultaten gedenke ich in meiner nächsten Abhandlung mitzuthemen.

Fig. 3 ist das Resultat der fünf zusammengehörenden Reihen der Tabelle I graphisch dargestellt (voll schwarz gezogen). Die Potentiale der letzten Columnne sind als Ordinaten, die Abstände von  $E$  in Metern als Abscissen verzeichnet.

21. Die im Vorhergehenden behandelten Versuche wurden mit frei endenden Hauptleitungen ausgeführt. Die Resultate der entsprechenden, mit verbundenen Enden  $E$  ausgeführten Versuche sind in Tabelle II mitgetheilt und in Fig. 4 graphisch dargestellt.

Die erste Beobachtungsstelle ist hier die Löthstelle der früher getrennten Enden der Hauptleitungen; die zweite ist von der ersten 79 cm entfernt, und jede folgende Beobachtungsstelle liegt 30 cm von der vorhergehenden.

1) Dies wird offenbar der Fall sein, wenn die Dimensionen des Gleitcontactes und der ersten Mikrometerkugel nebst dem dieselben verbindenden Leitungsdrähte hinreichend klein sind.



Tabelle II.

Obser- vations- stellen	Schlagweiten					Mittlere Werthe	Entpre- chende Potentiale	a. gemein- samen Minimal- werth red.
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	8,1	8,0	7,4	7,1	7,2	7,6	17,9	17,9
3	9,5	9,1	9,0	9,0	9,0	9,1	19,4	19,4
4	10,7	10,5	10,5	10,5	10,2	10,5	20,6	20,6
5	12,3	12,0	12,5	11,7	11,0	11,9	21,9	21,9
6	14,2	13,0	13,5	13,0	12,4	13,2	23,0	23,0
7	12,6	11,8	12,2	11,5	11,0	11,8	21,8	21,8
8	10,7	10,8	11,0	10,2	9,8	10,5	20,7	20,7
9	9,5	9,7	10,0	9,3	9,0	9,5	19,8	19,8
10	8,8	9,0	9,0	8,7	8,5	8,8	19,1	19,1
11	8,0	8,3	8,8	8,0	8,0	8,2	18,5	18,5
12	8,1	8,3	8,5	8,4	8,0	8,3	18,5	18,5
13	8,0	8,2	8,5	8,2	8,0	8,2	18,5	18,5
14	10,5	12,0	8,3	10,0	11,0	10,3	20,5	18,5
15	11,0	12,0	8,3	10,3	11,0	10,6	20,7	18,8
16	11,5	12,8	9,0	11,6	11,6	11,3	21,4	19,4
17	12,2	13,3	10,4	12,5	12,5	12,1	22,1	20,0
18	13,5	15,0	11,5	13,2	13,6	13,4	23,1	21,0
19	12,0	14,3	10,5	12,6	12,9	12,4	22,3	20,2
20	11,3	12,4	10,2	12,0	12,3	11,5	21,5	19,5
21	11,3	12,1	9,5	11,2	11,8	11,0	21,1	19,0
22	11,0	12,0	9,0	10,3	11,0	10,6	20,7	18,8
23	10,5	12,2	8,3	9,7	10,8	10,2	20,5	18,5
24	10,0	11,7	8,0	9,4	10,4	9,9	20,2	18,5
25	10,3	12,0	8,1	9,3	10,4	10,0	20,3	18,5
26	10,2	12,0	8,2	9,5	10,5	10,1	20,4	18,5
27	10,0	12,2	8,1	9,3	10,4	10,0	20,3	18,5
28	12,0	13,5	12,6	12,2	15,0	13,1	22,9	18,5
29	12,0	13,5	12,7	12,2	15,2	13,1	22,9	18,5
30	12,6	14,5	13,5	13,0	15,5	13,7	23,4	18,9
31	14,8	15,5	14,2	14,0	16,4	15,0	24,4	19,7
32	15,0	15,0	14,5	14,0	16,2	15,0	24,3	19,6
33	14,0	14,5	13,7	13,3	15,5	14,2	23,8	19,2
34	13,0	13,5	13,2	12,3	15,0	13,4	23,1	18,5
35	13,0	12,7	13,3	12,3	14,8	13,2	23,0	18,5
36	12,8	12,7	13,0	12,4	9,8	12,2	22,1	18,5
37	12,3	12,7	13,4	12,3	9,7	12,1	22,1	18,5
38	12,5	13,3	13,2	8,5	9,7	11,4	21,4	18,5
39	12,3	12,7	13,2	8,5	9,7	11,2	21,3	18,5
40	12,2	12,7	13,3	8,6	10,0	11,3	21,4	18,5
41	12,3	12,5	13,1	8,7	9,8	11,2	21,3	18,5
42	12,3	12,5	13,4	8,6	9,8	11,3	21,3	18,5

1) In den mittleren Werthen ist im zweiten Abschnitte eine sechste Reihe mitgenommen.

## Zur Theorie.

22. Die in den Fig. 2, 3 und 4 graphisch dargestellten Resultate schliessen sich der Hypothese an, dass im primären Leiter bei jeder Entladung „pendelförmige“ schnelle Schwingungen entstehen, sodass die Energie theilweise auf die Collectorplatten überströmt und einen fortschreitenden Wellenzug längs den 30 m langen Drähten hervorbringt.

Als zu Grunde liegende Voraussetzung der mathematischen Behandlung nehmen wir an, dass die an jeder Stelle gemessene Schlagweite dem Maximum des Potentials der Stelle entspricht.

Das Potential eines Punktes  $X$ , durch den direct fortschreitenden Wellenzug hervorgerufen, nennen wir  $V''(x, t)$ , wo nach der Hypothese  $V''$  folgende Form haben soll:

$$V'' = A_1 e^{-a_1 t - a_1 x} \sin(a t + a_1 x),$$

wo

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a}{a_1} = v,$$

indem man annimmt, dass die Bewegung gerade den Nullpunkt um die Zeit  $t = 0$  erreicht. — In jedem Punkt ist:

$$V'' = 0 \text{ bis } t = -\frac{x}{v}.$$

Das durch den von  $E$  reflectirten Wellenzug hervorgerufene Potential wird durch:

$$V'' = A_2 e^{-a_1 t + a_1 x} \sin(a t - a_1 x)$$

bestimmt, indem man einen möglichen Ausstrahlungsverlust durch die Reflexion voraussetzt.

In dem Punkt  $X$  ist

$$V'' = 0 \text{ bis } t = -\frac{x}{v}.$$

Man hätte auch einen zu bestimmenden Phasenverlust ohne erhebliche Erschwerung mitrechnen können, allein die Formeln werden weitläufig. Die Vergleichung der Theorie mit den Versuchsergebnissen ergibt übrigens, dass kein bemerkenswerther Phasenverlust bei frei endenden Leitungen stattfindet.

Das vollständige Potential eines Punktes  $X$  wird also dadurch bestimmt, dass:

$$V = 0 \text{ bis } t = -\frac{x}{v},$$

$V = V'$  zwischen den Zeiten  $t = -x/v$  und  $t = x/v$  und endlich  $V = V' + V''$  für jede folgende Epoche.

Die Aufgabe ist nun  $V_{\max}$ , einem willkürlichen  $x$  entsprechend, zu finden. Wir haben dann  $V_{\max}$  sowohl vor als nach der Zeit  $t = x/v$  zu untersuchen.

Zur Lösung des ersteren Theiles der Aufgabe sucht man  $V'_{\max}$  und findet:

$$V'_{\max} = A_1 e^{-\frac{a}{a} \arctan\left(\tan = \frac{a}{a}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}}.$$

Der Werth ist, wie man erwarten konnte, von  $x$  unabhängig, das grösste Maximum, der Höhe des ersten fortschreitenden Wellenberges entsprechend, tritt für einen Bogen im ersten Quadranten ein, die nachfolgenden durch Addition von

$$k \cdot \pi \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

Für das Folgende ist die Formel zu verwenden:

$$V''_{\max} = A_2 e^{-\frac{a}{a} \arctan\left(\tan = \frac{a}{a}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}}.$$

Nach der Zeit  $t = x/v$  ist  $V = V' + V''$ , und es gilt, das Maximum dieser Function zu finden.

$dV/dt = 0$  führt zu folgender Bestimmung von  $t$  (die Zeit des eintretenden Maximums oder Minimums):

$$\tan(at + a_1 x) = \frac{A_1 a e^{-a_1 x} + A_2 a e^{a_1 x} \cos 2a_1 x + A_2 a e^{a_1 x} \sin 2a_1 x}{A_1 a e^{-a_1 x} - A_2 a e^{a_1 x} \sin 2a_1 x + A_2 a e^{a_1 x} \cos 2a_1 x} = \tan \varphi \dots (\varphi),$$

indem man setzt:

$$at + a_1 x = a_1 (vt + x) = \varphi.$$

Demnach wird:

$$V_{\max} = A_1 e^{-\frac{a}{a} \varphi} \sin \varphi + A_2 e^{-\frac{a}{a} (\varphi - 2a_1 x)} \sin (\varphi - 2a_1 x).$$

23. Wir wollen das Verhältniss in einem Punkte  $P$  discutiren.

Wird  $x = p$  in die Gleichung  $(\varphi)$  eingeführt, so erhalten wir eine Bestimmung von  $\tan \varphi$  an der betreffenden Stelle. — Der erste zulässige positive Bogen ( $t$  muss ja  $> p/v$ ), welcher die Gleichung befriedigt, sei  $\varphi_0$ , also:

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 a e^{-a_1 p} + \dots}{A_1 a e^{-a_1 p} + \dots}.$$

Je nachdem der Werth von  $t$  wächst, werden auch die Bogen

$(\varphi_0 + \pi)$ ,  $(\varphi_0 + 2\pi)$ ,  $(\varphi_0 + 3\pi)$  etc. die Gleichungen befriedigen, und führt man dieselben in den Ausdruck für  $V$  ein, erhält man:

$$V_{\varphi_0} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0} \sin \varphi_0 + A_2 e^{-\frac{\alpha}{a} (\varphi_0 - 2a_1 p)} \sin (\varphi_0 - 2a_1 p)$$

$$V_{\varphi_0 + \pi} = -e^{-\frac{\alpha}{a} \pi} \cdot V_{\varphi_0}$$

$$V_{\varphi_0 + 2\pi} = -e^{-\frac{2\pi}{a}} \cdot V_{\varphi_0} \text{ etc.}$$

Das Potential in einem Punkte  $P$  bewegt sich also von seinem anfänglichen Werth um die Zeit  $t = p/v$  gegen seinen ersten Maximum- oder Minimumwerth, welcher den Zahlenwerth  $V_{\varphi_0}$  hat. Die nachfolgenden Maxima oder Minima interessieren uns nicht, weil die Zahlenwerthe immer weiter sinken.

Dagegen ist zu untersuchen, welcher von beiden, der Werth von  $V$  um die Zeit  $t = p/v$  oder  $V_{\varphi_0}$  grösser ist.

24. Für ein beliebiges  $x$  haben wir also:

$$(I) \quad \begin{cases} V_{\max} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{a} \varphi_0} \sin \varphi_0 + A_2 e^{-\frac{\alpha}{a} (\varphi_0 - 2a_1 x)} \sin (\varphi_0 - 2a_1 x) \\ \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 a e^{-\alpha_1 x} + A_2 a e^{\alpha_1 x} \cos 2a_1 x + A_2 a e^{\alpha_1 x} \sin 2a_1 x}{A_1 a e^{-\alpha_1 x} - A_2 a e^{\alpha_1 x} \sin 2a_1 x + A_2 a e^{\alpha_1 x} \cos 2a_1 x}, \end{cases}$$

wo  $\varphi_0$  der erste zulässige Bogen ist.

Durch Elimination des  $t$  aus dem System (I) würde man  $V_{\max}$  als Function von  $x$  allein bekommen. Dadurch wäre aber nichts gewonnen.

Dagegen lässt sich exact bestimmen, wo  $V_{\max}$  seine grössten und kleinsten Werthe längs des Drahtes hat, sowie auch diese Werthe selbst.

Wir setzen  $dV_{\max}/dx = 0$  und erhalten durch Reduction und Multiplication mit  $e^{-\frac{\alpha_1}{a} \varphi_0}$  (vorläufig sehen wir von dem dazu entsprechenden Grenzenmaximum ab):

$$\begin{aligned} & \left[ A_1 \left( -\frac{\alpha}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) + A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{\alpha}{a} \sin (\varphi_0 - 2a_1 x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \cos (\varphi_0 - 2a_1 x) \right) \right] \frac{d\varphi_0}{dx} = 2a_1 A_2 e^{2a_1 x} \\ & \quad \left( -\frac{\alpha}{a} \sin (\varphi_0 - 2a_1 x) + \cos (\varphi_0 - 2a_1 x) \right). \end{aligned}$$

Nach einer etwas weitläufigen, aber leicht durchführbaren Rechnung findet man:

$$\frac{d\varphi_0}{dx} = 2a_1 A_2 \frac{A_1 \left( \frac{a}{a} \sin 2a_1 x + \cos 2a_1 x \right) + A_2 e^{2a_1 x}}{A_1^2 e^{-2a_1 x} + 2A_1 A_2 \cos 2a_1 x + A_2^2 e^{2a_1 x}}.$$

Wenn man dieses in obenstehende Gleichung einsetzt, erhält man nach dem Ordnen:

$$A_1 \left( -\frac{a}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \left[ A_1 \frac{a}{a} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) + \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) + A_2 e^{2a_1 x} \right] \\ + A_1 \left( -\frac{a}{a} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) + \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) \right) \left[ A_1 + A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a} \sin 2a_1 x + \cos 2a_1 x \right) \right] = 0.$$

Wir reduciren zunächst die mit dem gebrochenen Striche bezeichneten Werthe bedeutend und erhalten:

$$-A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) + A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \\ \div A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left[ \frac{a}{a} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) - \cos(\varphi_0 - 2a_1 x) \right] \left[ \frac{a}{a} \sin 2a_1 x - \cos 2a_1 x \right] = 0.$$

Der berechnete Werth wird weiter reducirt und man erhält:

$$-A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) + A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left( -\frac{a}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right) \\ \div A_1 A_2 e^{2a_1 x} \left[ \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) \cdot \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) - \frac{a}{a} \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right] = 0.$$

also wieder:

$$-A_1^2 \sin \varphi_0 \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) \\ - A_1 A_2 e^{2a_1 x} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) \sin 2a_1 x \left( \frac{a^2}{a^2} + 1 \right) = 0,$$

welches sich weiter so auflöst:

$$\sin 2a_1 x = 0$$

oder

$$A_1 \sin \varphi_0 + A_2 e^{2a_1 x} \sin(\varphi_0 - 2a_1 x) = 0.$$

25. Betrachten wir zuerst, ob die letztere Gleichung im allgemeinen für reelle endliche  $x$  befriedigt wird. Aus der Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_2 e^{a_1 x} \cdot \sin 2a_1 x}{A_1 e^{-a_1 x} + A_2 e^{a_1 x} \cos 2a_1 x}.$$

Wird dieser Bruch mit demjenigen verglichen, der  $\operatorname{tg} \varphi_0$  in dem System (I) angibt, so erhält man die Gleichung;

$$\frac{A_2 e^{a_1 x} \sin 2 a_1 x}{A_1 e^{-a_1 x} + A_2 e^{a_1 x} \cos 2 a_1 x} = \frac{A_1 \frac{a}{a} e^{-a_1 x} + A_2 \frac{a}{a} e^{a_1 x} \cos 2 a_1 x}{-\frac{a}{a} A_2 e^{a_1 x} \sin 2 a_1 x},$$

woraus:

$$A_2^2 e^{2 a_1 x} + 2 A_1 A_2 \cos 2 a_1 x + A_1^2 e^{-2 a_1 x} = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung entspricht gerade  $\gamma^2$ , wo  $\gamma$  die Diagonale ist in einem Parallelogramme mit den Seiten  $A_1 e^{-a_1 x}$ ,  $A_2 e^{a_1 x}$  und dem dazwischenliegenden Winkel  $2 a_1 x$ .

Wenn alles reell sein soll, kann hier die Diagonale nur dann 0 werden, wenn:

$$(1) \quad A_2 e^{a_1 x} = A_1 e^{-a_1 x} = 0$$

oder

$$(2) \quad A_2 e^{a_1 x} = A_1 e^{-a_1 x} \text{ und } \cos 2 a_1 x = \div 1.$$

Das erste System ist unmöglich. Das zweite System wird in der Regel nicht gleichzeitig befriedigt; sollte dies gleichwohl eintreffen, so hat man nur einen speciellen Fall der Gleichung:

$$\sin 2 a_1 x = 0,$$

welcher somit die höchsten und niedrigsten Werthe für  $F_{\max}$  allein bestimmt.

Die Gleichung wird befriedigt, wenn:

$$x = \frac{k \pi}{2 a_1} (k = 0, 1, 2, 3 \dots).$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck für  $\operatorname{tg} \varphi_0$  (I) eingesetzt, so erhält man immer:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{a},$$

und es gilt dann die Bogen zu bestimmen, welche jedem der Werthe für  $x$  entsprechen.

$$\varphi_0 = (at + a_1 x)$$

soll eine solche Grösse haben, dass die dadurch bestimmte Zeit  $t > x/v$  wird.

Wir setzen folglich:

$$t = \frac{a_1}{a} x + \tau,$$

wo  $\tau$  positiv und möglichst klein sein soll.

Demnach wird:

$$(\tau) \dots \operatorname{tg} \varphi_0 = \operatorname{tg} (a \tau + 2a_1 x) = \frac{a}{a}$$

für sämtliche Werthe

$$x = \frac{k\pi}{2a_1}.$$

$x = 0$  entspricht offenbar ein Bogen im ersten Quadrant, sodass

$$a \tau_0 = \arccos \left( \operatorname{tg} = \frac{a}{a} \right).$$

Lässt man nun einen anderen den Werth  $k\pi/2a_1$  annehmen, so sieht man, dass der kleinste Bogen  $a \tau$ , welcher die Gleichung  $(\tau)$  befriedigt, immer noch  $a \tau_0$  bleibt.

$x = 0$  entspricht folglich  $\varphi_0 = a \tau_0$

$$x = \frac{\pi}{2a_1} \quad , \quad , \quad \varphi_0 = a \tau_0 + \pi$$

$$x = \frac{2\pi}{2a_1} \quad , \quad , \quad \varphi_0 = a \tau_0 + 2\pi \text{ u. s. w.}$$

Wird dieses in  $V_{\max}$  eingeführt, so erhält man für

$x = 0$	$V_{\max} = V'_{\max} + V''_{\max}$
$x = \frac{\pi}{2a_1}$	$V_{\max} = + V'_{\max} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}} + V''_{\max}$
$x = \frac{2\pi}{2a_1}$	$V_{\max} = + V'_{\max} \cdot e^{-\frac{2\pi}{a}} + V''_{\max}$
$x = \frac{3\pi}{2a_1}$	$V_{\max} = - V'_{\max} \cdot e^{-\frac{3\pi}{a}} + V''_{\max} \text{ u. s. w.}$

$V_{\max}$  nähert sich also dem  $V''_{\max}$  als Grenze.

Die grössten Ausschläge nach beiden Seiten von  $V''_{\max}$  nehmen exponentiell ab mit einem Dämpfungsverhältniss  $e^{-2\pi a/a}$ , dem Verhältniss bei dem einfallenden Wellenzug ähnlich, während der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima  $-\pi/a_1 =$  genau die Hälfte der Wellenlänge des einfallenden Zuges ist.

26. Wir gehen nunmehr dazu über, dieses theoretische Resultat mit dem experimentell gefundenen zu vergleichen.

Vor der Zeit  $t = x/v$  war  $V_{\max} \text{ constant} = V'_{\max}$ . Mit derselben Interpretation wie in den Fig. 2 und 3 wird  $V_{\max}$



folglich durch eine gerade Linie parallel mit der  $X$ -Axe vertreten sein. Diese finden wir offenbar in den geradlinigen Partien wieder, welche in demselben Niveau an der experimentellen Curve liegen.

Hierdurch wird also

$$V'_{\max} = A_1 e^{-\frac{\alpha}{a} \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}\right)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}$$

bestimmt.

Zunächst soll nach der Zeit  $t = x/v$  für  $x = 0$

$$V_{\max} = V'_{\max} + V''_{\max},$$

sein, wodurch  $V''_{\max}$ , also auch das Reflexionsverhältniss  $A_2/A_1$  bestimmt ist.

Der Abstand aufeinander folgender Wellengipfel  $\pi/a_1$  ist als Mittelzahl der Abstände zwischen den Gipfeln der experimentellen Curve zu bestimmen, und das Dämpfungsverhältniss so festzustellen, dass die theoretischen Maxima und Minima sich den experimentellen möglichst nahe anschliessen.

Führt man den Vergleich aus, so wird man zu dem Resultate gelangen, dass der einfallende Wellenzug folgende Parameter gehabt hat:

Die Wellenlänge  $\lambda = 7,6$  m, das Dämpfungsverhältniss  $D = 0,7$  und  $A_2/A_1 = 0,65$ .

Mit diesen Constanten sind die Maxima und Minima der theoretischen Curve Fig. 3 als von kleinen Kreisen umgebene Punkte dargestellt.

Die gestrichelte Curve zeigt den Verlauf der ganzen theoretischen Curve in diesem Falle; sie windet sich, wie man sieht, nicht ganz regelmässig zwischen ihren höchsten und niedrigsten Punkten.

Die punktirte Curve gibt das Potential in jedem Punkte an gerade in dem Augenblick, wo  $V''$  ankommt, und die Gleichung derselben erhält man, wenn man in den Ausdruck für  $V'$   $t = x/v$  setzt, also:

$$V'_{t=\frac{x}{v}} = A_1 e^{-2\alpha x} \sin 2a_1 x,$$

was geometrisch eine Wellenlinie von derselben Form wie die des einfallenden Wellenzuges gibt, nur sind alle Abscissen auf die halben Werthe zusammengedrückt.

Die Figur lässt ersehen, wie sich das Potential in einem Punkte  $P$  verändert. Von dem Werthe zur Zeit  $t = p/v$ , welcher durch die  $x = p$  entsprechende Ordinate der punktirten Curve vertreten wird, bewegt sich das Potential gegen die gestrichelte Curve. Von hier ab sinkt dann wieder der numerische Werth des Potentials und bewegt sich auf die entgegengesetzte Seite der  $X$ -Axe hinüber, wie bei der Discussion Art 23 angegeben werde.

Bei dem ersten Wellenthale der theoretischen Curve bemerkt man einen Discontinuitätspunkt. Das Potential in Punkten mit kleineren Abcissen als bei diesem beginnt um die Zeit  $t = x/v$  von seinem anfänglichen Werth zu steigen; die Potentiale in Punkten unmittelbar ausserhalb desselben sinken, so dass kein Maximums- oder Minimumwerth erreicht wird, bis das Potential unter die  $X$ -Axe zu Werthen gesunken ist, welche dem kleinen gestrichelten Curvenzweig entsprechen.

Da man bei der experimentellen Untersuchung mit dem Mikrometer nur Zahlwerthe misst, so müsste man, um das experimentelle Resultat mit dem theoretischen zu vergleichen, alles was unter der  $X$ -Axe liegt, über dieselbe aufwärts biegen; die theoretische Untersuchung reicht indess nicht in die Wellenthäler hinab, davon wird sie durch die gerade Linie, welche  $I'_{\max}$  vertritt, abgeschnitten.

27. Eine theoretische Untersuchung des Falles, wo die Leitung bei  $E$  geschlossen war, muss mit der vorhergehenden ganz analoge und entsprechende Resultate geben.

Man braucht nur  $A_2 = -A_1$  einzuführen, wodurch:  $I'_{\max} = -I'_{\max}$  (vgl. Art. 25, Schluss).

Indem man  $A_2 = -A_1$  setzt, wird somit angenommen, dass die Wellenzüge der Hauptleitung keinen beträchtlichen Verlust an Energie erleiden, indem sie um Ecken biegen, was auch experimentell bestätigt wird, wenn man die Höhe der fortschreitenden Welle in zwei aufeinanderfolgenden geradlinigen Minima misst und dabei die Leitung in der Zwischenpartie eine scharfe Biegung hat.

In Uebereinstimmung mit den Versuchen gibt ferner die Theorie bei geschlossener Leitung gerade Linien an Stellen der Minima, ausgenommen bei  $E$ , wo bei symetrischer Aufstellung des primären Leiters das Potential absolut 0 ist.

Man kann das Verhältniss verändern, wenn man den Abstand des einen Plattenpaares (die primäre Platte mit dazu gehörender Collectorplatte) grösser macht als den des zweiten. Dadurch erzielt man einen kräftigeren Wellenzug in der einen Hauptleitung, als in der zweiten, was sich bei Messungen im Punkt *E* augenblicklich kundgibt, indem man durch das Telephon Funken bis auf ca. 0,5 Mikron hinab nachweisen kann.

Die Uebereinstimmung der Versuche mit der Theorie bei den im Vorhergehenden behandelten Untersuchungen ist demnach befriedigend.

Die in der Fig. 3 am meisten hervortretenden Abweichungen, sowie der Umstand bei der Fig. 4, dass der erste Wellenberg viel zu niedrig ist, können nicht directen Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden; ausserdem lassen sie sich qualitativ ganz einfach durch das Eingreifen solcher Verhältnisse erklären, die in die mathematische Behandlung nicht aufgenommen werden konnten.

Die Theorie bezieht sich auf die Potentiale der Hauptleitung selber, während die Experimente die Potentiale derjenigen Mikrometerkugel betreffen, die durch einen 3 cm langen, sehr dünnen Neusilberdraht damit in Verbindung steht, und es ergibt sich aus der Uebereinstimmung, wie merkwürdig schnell das Potential der kleinen Polkugel den gewaltsamen Potentialveränderungen der Hauptleitung hat folgen können.

Beispielsweise wollen wir das Verhältniss etwas näher betrachten, wodurch die oben erwähnte Anomalie bei der Fig. 4 wahrscheinlich bewirkt wird.

Graphisch lässt sich das Verhältniss leicht aus Fig. 5 ersehen. *E* ist die Löthstelle der beiden Hauptleitungen; auf der linken Seite derselben ist der durch die eine Hauptleitung kommende Wellenzug dargestellt, auf der rechten Seite ist der durch die zweite Hauptleitung kommende punktirt.

Der Zustand entspricht der Zeit  $t = 0$ . In dem Punkt *P* hat man den Gipfel des ersten Wellenberges der stehenden Schwingungen und das Maximum tritt um eine halbe Schwingungsdauer nach dem verzeichneten Zustand ein.

Demnach erhält die kleine Mikrometerkugel anfangs ein grosses positives Potential, um sodann nach etwas über eine hundertmilliontel Secunde ein noch niedrigeres negatives an-

zunehmen. Dass das Maximum proportional mit dem für die Hauptleitung theoretisch berechneten Resultat eintreten soll, ist somit nicht zu erwarten.

Hat man die Ursache dieser Unregelmässigkeiten erst erkannt, wird man sie wohl bei künftigen Versuchen vermeiden können.

28. Wir fanden bei dem Art. 26 angestellten Vergleich  $A_2/A_1 = 0,65$ .

Es ist jedoch nicht sicher, dass man von dieser Zahl auf die Grösse des Reflexionsverlustes bei  $E$  direct schliessen kann.

Ein Ausstrahlungsverlust ist wohl wahrscheinlich; der Umstand aber, dass der Messapparat (Gleitcontact und Mikrometerkugel) eine beträchtliche Capacität hat, kann auch hier das Resultat beeinflussen, wenn auch nicht gerade so, wie bei geschlossener Leitung erwähnt wurde.

Lässt man die Betrachtungsweise gelten, dass eine kupferne Leitung bei schnellen periodischen Strömen sich als eine röhrenförmige Anordnung von elementaren Leitungsfibern ansehen lässt, so muss man sich *eine frei endende Leitung zunächst als eine Menge von Metallschlingen vorstellen, wo die Wellenzüge gleichzeitig durch die beiden Zweige fortschreiten, um die Ecke biegen und dann interferiren.*

Weil nun, wie Art. 27 erwähnt, der Energieverlust eines Wellenzuges, welcher um eine Ecke biegt, jedenfalls sehr klein ist, so ist es nicht wahrscheinlich, dass der Werth  $A_2/A_1 = 0,65$  seinen wesentlichen Grund in der Ausstrahlung hat.

Wie schon oben bemerkt, sind indess andere Umstände vorhanden, welche darauf deuten, dass die Intensität des reflectirten Wellenzuges nur ein Bruchtheil der des einfallenden werden kann.

Zur Erläuterung wollen wir sogar annehmen, dass von einem Punkte  $P$  an dem 2 mm starken Kupferdraht, welcher die Hauptleitung bildet, ein besonderer dünner Metaldraht von — sagen wir — unbegrenzter Länge geradlinig ausgeht, dann verliert ganz sicher der fortschreitende Wellenzug längs der Hauptleitung durch die Nebenleitung bei  $P$  an Energie, sodass der von  $E$  rückkehrende Zug, wenn er z. B. durch einen Punkt  $O$  (Fig. 6) hindurchgeht, mit dem einfallenden sehr annähernd übereinstimmt, nur mit kleinerer Intensität. Das

Verhältniss zwischen der reflectirten und der einfallenden Welle hält sich gewiss fast unverändert, abgesehen von der Länge  $PE$ , jedenfalls solange sich diese über einem gewissen passenden Werth hält.

So einfach wie bei dem eben Vorausgesetzten ist das Verhältniss nicht bei den Versuchsreihen. Viel spricht indess dafür, dass diejenige Polkugel, die mit der Hauptleitung in Verbindung steht, durch ihre Capacität sowie durch den gewiss bedeutenden Verschiebungstrom zu der sehr nahe liegenden zweiten Polkugel ein Verhältniss herstellt, welches dem oben hypothetisch erwähnten zum Theil ähnlich ist.

Dass man bei diesem bei  $E$  stattfindenden Verlust nicht einem ähnlichen Phänomen gegenübersteht, wie wenn ein stark geladener Leiter durch Spitzen und Rauigkeiten seine Electricität an die Luft abgibt, ist besonders untersucht worden.

Das Verhältniss  $A_2/A_1$  wurde sehr genau dasselbe gefunden, mochte die Hauptleitung in einer wohl abgerundeten Zinnkugel oder in einer scharfen Stahlspitze enden.

Ich werde später vollständigere Untersuchungen in Bezug auf die Reflexion ausführen, um gewisse wichtige Fragen dadurch klar zu machen.

#### Anhang.

*Resultate, bei Wiederholung der Versuche der Hrn. Sarasin und de la Rive.*

Ich erlaube mir vorläufig einige neue Resultate mitzutheilen, die durch Wiederholung der Versuche der Hrn. Sarasin und de la Rive mit Hülfe eines secundären Rahmens mit Telephon (vgl. Art. 2) erlangt sind.

Die Anordnung war ungefähr dieselbe wie ad Fig. 1 beschrieben und stimmt also bis auf meinen secundären Leiter im Wesentlichen mit der der genannten Physiker überein.

Bei dem Wagen  $W$  ist die Veränderung eingetreten, dass das Mikrometer  $M$  entfernt und an seiner Stelle ein secundärer Rahmen an dem verticalen Brett befestigt ist.

Die Hauptleitungen werden durch Löcher im Holzgestelle des Wagens geführt, sodass der Abstand von dem secundären Rahmen zu den Drähten immer unverändert bleibt.

Der benutzte secundäre Rahmen stimmt in Schwingungsdauer und Dämpfungsverhältniss mit einem gewöhnlichen secundären Rahmen von ähnlichen Dimensionen beinahe überein. (Art. 2.)

Man darf annehmen, das seine Dämpfungsverhältnisse um nicht viel mehr als 50 Proc. und seine Schwingungsdauer um nicht über 5 Proc. bei den vorgenommenen Anordnungen verändert werden. Diese Behauptung stützt sich unter anderem auf einen von Dr. V. Bjerknes mittels seiner bekannten Resonanzkörbe ausgeführten Versuch.

Die Beobachtungen können bei einem solchen secundären Rahmen mit Telephon leicht so ausgeführt werden, dass die einzelnen brauchbaren „Knotenbestimmungen“ nur um 1 bis 2 Proc. der Wellenlänge verschieden sind, und die Messungen sind somit weit sicherer als bei den entsprechenden Wellenlängebestimmungen des primären Leiters (Art. 15).

Nach einer Reihe von Versuchen, bei denen die Schwingungsdauer der verschiedenen primären Leiter zwischen 40 Proc. über und unter der Schwingungsdauer des unveränderlichen secundären Leiters variierte, können die Resultate in folgendem Satze zusammengefasst werden:

*Wenn die Schwingungsdauer des primären Leiters grösser als die des secundären ist, so nimmt der Abstand zwischen den aufeinanderfolgenden „Knoten“ — von dem freien Ende der Leitung gerechnet — immer ab und nähert sich einer gewissen Grenze, die praktisch genommen erreicht wird, nachdem man durch den dritten „Knoten“ hindurch gegangen ist.*

*Wenn die Schwingungsdauer des primären Leiters kürzer als die des secundären innerhalb des obenerwähnten Intervalls ist, so wächst der Abstand zwischen den „Knoten“ immer, bis sie eine Maximalgrenze erreichen, die mit der soeben erwähnten Minimalgrenze zusammenfällt.*

Der Abstand zwischen dem ersten und zweiten „Knoten“ variierte unter den obenerwähnten Umständen um ca.  $4\frac{1}{2}$  Proc. zu beiden Seiten des Grenzwertes oder im Ganzen ca. 30 cm, da der Grenzabstand immer 3,52 m war.

Durch die Benutzung eines primären Leiters, dessen Schwingungsdauer mittels besonderer Experimente bestimmt und dem Grenzwerte der secundären Schwingungsdauer

fast ganz ähnlich befunden war, wurden unveränderliche Abstände bis zum Grenzabstande gefunden.

Alle Verhältnisse blieben unverändert, wenn an die freien Enden der Hauptleitung zwei gleich lange Drahtstücke in directer Verlängerung angelöthet wurden, nur verschoben sich alle Knoten gegen die freien Enden um eine der Länge der angelötheten Stücke entsprechende Strecke.

Dagegen näherten sich die Knoten immer schneller der Aequidistanz, wenn man an den freien Enden *E* Metallplatten von immer grösseren Dimensionen befestigte.

In einer späteren Abhandlung werde ich die hier berührten Phänomene ausführlicher sowohl experimentell als mathematisch behandeln.

Kristiania, Ende September 1892.



### III. *Bestimmung von Dielectricitätsconstanten mittels des Differentialinductors; von Oskar Werner.*

(Auszug des Herrn Verfassers aus seiner Marburger Inaug.-Dissert.)

Hr. Prof. Elsas hat in diesen Annalen eine Methode veröffentlicht, Dielectricitätsconstanten mit Hülfe des von ihm construirten Differentialinductors zu bestimmen.<sup>1)</sup> Auf seine Anregung habe ich eine Anzahl Messungen nach dieser Methode im mathematisch-physikalischen Institute der Universität Marburg ausgeführt. Ausserdem habe ich noch eine andere Art der Bestimmung von Dielectricitätsconstanten mittels des Differentialinductors angewandt, die Hr. Elsas als Analogon der im 42. Bande beschriebenen Methode zur Bestimmung von kleinen Widerständen angegeben hat.<sup>2)</sup>

$A_1$  und  $E_1$  in Fig. 1 sollen Anfang und Ende des einen Drahtes,  $A_2$  und  $E_2$  Anfang und Ende des zweiten Drahtes vom Differentialinductor bezeichnen.

$E_1$  und  $E_2$  werden verbunden.

In die beiden Stromkreise wird je ein Condensator und ein Rheostat und zwischen beide je ein Ende des Telephondrahtes geschaltet, sodass letzterer von den sich in ihn verzweigenden Theilen der beiden Inductionsströme im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird (Fig. 1). Diese Schaltung entspricht der „Kirchhoff'schen Nebenschlusschaltung“ zur Widerstandsmessung.

Besitzen die beiden Condensatoren  $C_1$  und  $C_2$  gleiche Capacität und sind die beiden Widerstände  $W_1$  und  $W_2$  gleich,

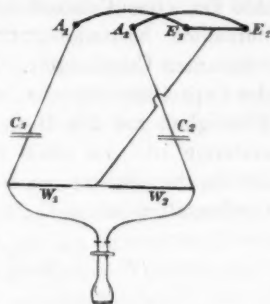


Fig. 1.

1) A. Elsas, Wied. Ann. **44**. p. 654. 1891.

2) A. Elsas, Wied. Ann. **42**. p. 173. 1891.

so sind die Verhältnisse in beiden Stromkreisen dieselben; die durch das Telephon gehenden Ströme sind gleich und entgegengesetzt gerichtet, sodass ihre Wirkungen auf den Magnet desselben sich aufheben.

Wird in einem der beiden Stromkreise die Capacität des Condensators und der Widerstand des Rheostaten in umgekehrtem Verhältnisse verändert, sodass die Capacität  $n$  mal kleiner, der Widerstand  $n$  mal grösser wird, dann bleibt die Stromverzweigung unverändert, und es tritt kein Geräusch im Telephon auf.

Bezeichnet man also mit  $C_1$  und  $C_2$  die Capacitäten der Condensatoren, so schweigt das Telephon, wenn folgende Proportion stattfindet:

$$C_1 : C_2 = W_2 : W_1.$$

Als den einen Condensator schaltet man den zur Flüssigkeitsaufnahme bestimmten Condensator ein, als anderen einen constanten Condensator. Dann bestimmt man das Verhältniss der Capacitäten für die beiden Fälle, dass Luft und dass eine Flüssigkeit mit der D.-C.  $D$  dielectricische Zwischenschicht bei ersterem ist. Ist seine Capacität im ersten Falle  $= C_1$ , so ist sie im zweiten  $= D \cdot C_1$ ; die Capacität des constanten Condensators sei  $= C_2$ ; dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 : C_2 &= W_2' : W_1' \\ D \cdot C_1 : C_2 &= W_2'' : W_1'' \\ D &= \frac{W_2' W_2''}{W_1'' W_1'} \end{aligned}$$

Die Abgleichung mittels der Widerstände erfolgte derart, dass der eine Vergleichswiderstand über das thatsächliche Tonminimum hinaus verändert wurde, bis das Telephon wieder einen deutlichen Ton gab, und dann nach der entgegengesetzten Richtung wieder derjenige Widerstand bestimmt wurde, bei dem der Ton mit derselben Stärke und Klangfarbe erschien; das Mittel aus beiden Werthen wurde als der dem Minimum entsprechende Werth angenommen. Als Vergleichswiderstände wurden Siemens'sche Rheostaten benutzt.

Bevor mit Hülfe der Methoden Bestimmungen ausgeführt wurden, wurde eine Reihe von Messungen vorgenommen, die den Zweck hatten:

1. das Verhalten des Differentialinductors bei diesen Schaltungsweisen zu prüfen;

2. den Bereich zu prüfen, in dem die Proportionalität von Plattenentfernung und reciprokem Werthe der Capacität für den Kohlrausch'schen Condensator angenommen werden kann;

3. die beiden zur Bestimmung von Flüssigkeitsconstanten angewandten Methoden zu vergleichen.

Zur Prüfung des Differentialinductors wurden zwei Kohlrausch'sche Condensatoren mittels der Differentialschaltung gegen einander abgeglichen und dann vertauscht, um festzustellen, ob die Abgleichung jetzt noch richtig war. Dies war nicht der Fall, es trat im Telephon ein Ton auf; derselbe konnte weder durch Zuschalten von Widerstand noch von Windungen zu einer der beiden Spiralen zum Verschwinden gebracht werden, sondern nur durch Veränderung der Plattenentfernung eines der beiden Condensatoren.

Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, dass sich das innere Ende einer Inductionsspirale wegen der Spannungsercheinungen an geöffneten Spiralen dem äusseren Ende nicht genau gleich verhält.

Zur genaueren Untersuchung wurde nach hergestellter Abgleichung die bewegliche Platte des einen Condensators von einer bestimmten Anfangsstellung aus um gemessene Strecken verschoben und jedesmal die entsprechende Veränderung der Plattenentfernung des anderen Condensators durch eine neue Einstellung bestimmt. Dann wurden die Condensatoren vertauscht und die Messungen wiederholt.

Die beiden Condensatoren hatten Platten von genau gleichem Durchmesser, besaßen also bei gleicher Plattenentfernung gleiche Capacität; eine Aenderung dieser Entfernung bei dem einen Condensator liess dieselbe Aenderung für den anderen erwarten.

In Wirklichkeit waren aber bei der ersten Messungsreihe die durch die Einstellung erhaltenen Plattenverschiebungen des einen Condensators kleiner, als die direct gemessenen des anderen, bei der zweiten Messungsreihe war das Umgekehrte der Fall; da die Abweichungen nach beiden Seiten ungefähr gleich gross waren, gab das Mittel der durch die Einstellung

bestimmten Werthe sehr nahe den direct gemessenen Werth der Verschiebung.

In Tabelle I bedeuten  $S$  und  $S_1$  die Ablesungen für die Stellung der beweglichen Condensatorplatte. Die Ablesungen werden bei vergrößertem Plattenabstand kleiner. Die Ablesungen  $S$  beziehen sich also auf die ursprüngliche Stellung des Condensators, die Ablesungen  $S_1$  auf den vergrößerten Plattenabstand desselben. Die Differenz  $S - S_1$  gibt die Aenderungen des Abstandes an; die Spalte  $M$  enthält den Mittelwerth derselben. Die beiden durch Vertauschung der Condensatoren erhaltenen Messungsreihen sind durch eine Horizontallinie getrennt. Ueber der Tabelle ist die direct gemessene Verschiebung  $d$  notirt. Die Zahlen bedeuten Millimeter.

Tabelle I.

$d = 2,55 \text{ mm}$				$d = 2,32 \text{ mm}$				$d = 1,90 \text{ mm}$				$d = 1,02 \text{ mm}$			
$S$	$S_1$	$S - S_1$	$M$	$S$	$S_1$	$S - S_1$	$M$	$S$	$S_1$	$S - S_1$	$M$	$S$	$S_1$	$S - S_1$	$M$
9,800	7,268	2,532		9,796	7,513	2,283		9,975	8,097	1,878		9,977	8,958	1,019	
9,794	7,301	2,493		9,796	7,512	2,284		9,976	8,096	1,880		9,980	8,958	1,022	
9,795	7,290	2,505		9,798	7,504	2,294		9,976	8,981	1,885		9,980	8,662	1,018	
2,505				2,326				1,906				1,00			
9,802	7,190	2,612		9,794	7,420	2,374		9,975	8,044	1,931		9,975	8,944	1,031	
9,787	7,140	2,647		9,796	7,433	2,363		9,976	8,046	1,930		9,976	8,948	1,028	
9,796	7,198	2,598		9,796	7,438	2,358		9,976	8,044	1,932		9,980	8,958	1,022	

Hieraus folgt, dass die Verschiebung des Kohlrausch'schen Condensators, die bei vollständiger Gleichheit der Stromkreise auftreten würde, dadurch erhalten wird, dass man die Messung nach Vertauschung der Condensatoren wiederholt und aus den beiden gefundenen Werthen das Mittel nimmt. Dies muss im allgemeinen geschehen, wenn man die Capacität zweier Condensatoren vergleicht, indem man dieselben nach einander zu einem constanten Condensator in dem einen Stromkreise hinzuschaltet und die entsprechenden Verschiebungen des Vergleichscondensators misst.

Bleibt bei den Messungen der eine Differentialzweig ungeändert, wie dies bei der Untersuchung fester Körper der Fall ist, so ist dagegen eine Vertauschung der Condensatoren nicht erforderlich, denn man hat jedesmal dieselbe Abweichung vom Mittelwerthe.

Für die Vergleichung der Capacität beliebiger Condensatoren erreicht man denselben Vortheil, indem man sie zu dem Messcondensator hinzuschaltet, den constanten Condensator im anderen Zweige ungeändert lässt und die jedesmalige Verschiebung des Messcondensators bestimmt.

Ferner wurde der Bereich, in dem die Capacität der Plattenentfernung umgekehrt proportional gesetzt werden kann, für den Kohlrausch'schen Condensator experimentell geprüft. Dieser wurde gegen einen constanten Condensator im anderen Differentialzweige abgeglichen; dann wurden zu dem letzteren zwei andere constante Condensatoren erst einzeln, hierauf beide hintereinander hinzugeschaltet und die entsprechenden Verschiebungen des Kohlrausch'schen Condensators gemessen.

Die Tabelle II gibt ähnlich wie Tabelle I die Ablesungen und Verschiebungen dieses Condensators an, indem der im anderen Stromzweige hinzugeschaltete Condensator über der Tabelle notirt ist.

Tabelle II.

Cond. I				Cond. II				Cond. I u. II hintereinander.			
S	S <sub>1</sub>	S-S <sub>1</sub>	M	S	S <sub>1</sub>	S-S <sub>1</sub>	M	S	S <sub>1</sub>	S-S <sub>1</sub>	M
8,957	8,029	0,928		8,957	7,540	1,417		8,957	6,628	2,329	
8,956	8,028	0,928		8,956	7,529	1,427		8,956	6,628	2,328	
8,955	8,028	0,927		8,955	7,527	1,428		8,955	6,600	2,355	
			0,916				1,402				2,311
8,957	8,052	0,905		8,957	7,575	1,382		8,957	6,674	2,283	
8,956	8,045	0,911		8,956	7,569	1,387		8,956	6,673	2,283	
8,954	8,058	0,896		8,954	7,581	1,373		8,954	6,667	2,287	

Der Werth  $0,916 + 1,402 = 2,318$  stimmt mit dem Werthe 2,311 so genau überein, das die Gültigkeit der Proportionalität innerhalb dieser Grenzen angenommen werden kann, d. h. bis zu einer Plattenentfernung von ungefähr 2,5 mm, da der ursprüngliche Plattenabstand  $a$  etwa 0,2 mm beträgt; alle späteren Messungen liegen in diesem Bereiche.

Zum Vergleiche der beiden für die Bestimmung von Flüssigkeitsconstanten angewandten Schaltungsweisen wurde mittelst jeder das Verhältniss zweier Luftcondensatoren ermittelt. Zunächst wurden die beiden Kohlrausch'schen Con-

condensatoren bei gleichem Plattenabstand  $a$  abgeglichen; dann wurde die Plattenentfernung des einen mittels Glasplättchen zu  $a + d$  und  $a + d_1$  vergrößert und das Verhältniss  $d_1/d$  nach beiden Methoden gemessen. Nach der Differentialmethode ergab es sich direct als das Verhältniss der Verschiebungen des anderen Condensators. Nach der anderen Methode fand man durch das Verhältniss der Widerstände die beiden Verhältnisse  $(a + d)/a$  und  $(a + d_1)/a$  und hieraus  $d/d_1$ .

Tabelle III.

## A.

$d$				$d_1$			
$S$	$S_1$	$S-S_1$	$M$	$S$	$S_1$	$S-S_1$	$M$
9,859	9,140	0,719	0,720	9,874	8,836	1,038	1,040
9,865	9,143	0,722		9,868	8,827	1,041	
9,864	9,144	0,720		9,875	8,833	1,042	

$$d/d_1 = \frac{1,04}{0,72} = 1,44.$$

## B.

$a_1/a_2$	$W_1/W_2$	$M$
$\frac{a+d}{a}$	$\frac{300}{67,5} = 4,44$	4,44
	$\frac{200}{45} = 4,44$	
	$\frac{100}{22,5} = 4,44$	
$\frac{a+d_1}{a}$	$\frac{300}{51} = 5,88$	5,88
	$\frac{200}{34} = 5,88$	
	$\frac{100}{17} = 5,88$	

$$(a + d)/a = 4,44 \quad (a + d_1)/a = 5,88$$

$$d/a = 3,44 \quad d_1/a = 4,88$$

$$d/d_1 = \frac{4,88}{3,44} = 1,42.$$

Die beiden Werthe stimmen zwar nicht völlig überein, man muss aber bedenken, dass die Anwendung der zweiten Schaltungsweise die gesuchte Grösse erst auf Umwegen ergibt. Die Abweichungen vom Mittelwerthe betragen nicht ganz 0,7%.

Im allgemeinen kommt man aber (Hrn. Palaz entgegen) zu dem Resultat, dass bei dieser Methode auch bifilar gewickelte Vergleichswiderstände benutzt werden können.

Nun wurde nach beiden Methoden eine Anzahl von Dielectricitätsconstanten gut isolirender Substanzen gemessen, und schliesslich wurde versucht, dieselben für einige unvollkommene Isolatoren zu bestimmen.

Von diesen Messungen gebe ich nur die Mittelwerthe an.

#### A. Messungen nach der Differentialmethode.

##### 1. Feste Körper.

Von festen Körpern wurden untersucht: Paraffin, Hartgummi, Spiegelglas.

Die Substanzen wurden in Form von möglichst planparallelen Platten angewandt, die hinreichend grösser als die Condensatorplatten waren und zwischen letztere mittels eines Stativs gebracht wurden, an dem sie durch einen Seidenfaden aufgehängt waren.

In den einen Differentialzweig wurde ein constanter Condensator geschaltet und durch den Verschiebungscondensator im anderen Zweige abgeglichen, während sich die dielectricische Substanz von der Dicke  $d$  zwischen den Platten des letzteren befand: Stellung  $S$  der beweglichen Platte; dann wurde die dielectricische Substanz entfernt und die Abgleichung von neuem hergestellt; Stellung  $S_1$  der beweglichen Platte;  $S_1 - S = x$  gibt die Verschiebung der beweglichen Platte an, und die D.-C. der betreffenden Substanz folgt aus der Gleichung  $D = d/(d-x)$ .

Die Dicke der untersuchten Platten wurde aus Messungen an einem Netzwerke von möglichst vielen Punkten als Mittelwerth abgeleitet.<sup>1)</sup>

1) Vgl. Boltzmann, Wien. Sitzungsber. 67. 1873.



Tabelle IV.

Substanz	$d$	$x$	$D$	Werthe anderer Beobachter	
Paraffin	3,431	1,912	2,254	Boltzmann	2,32
	2,639	1,469		Hopkinson	2,29
	3,288	1,826		Winkelmann	2,13 u. 2,21
				Donle	2,309
Hartgummi	3,075	2,060	3,030	Boltzmann	3,15 u. 3,48
				Winkelmann	2,72
				Thomson	1,9 u. 2,1
				Lecher	2,64—3,01
Spiegelglas	a) 1,211	1,040	7,082	Romich u. Nowak	7,5
				Hopkinson	6,57—10,1
				Winkelmann	6,46
	b) 6,986	6,088	7,780	Donle	6,589—7,209
				Thomson	2,7
				Lecher	4,64—731

## II. Flüssigkeiten.

Von Flüssigkeiten wurden untersucht: Petroleum, Petroleumäther, Terpentinöl, Xylol, Toluol.

$x_1$  bedeutet die Entfernung der Platten, bei welcher der Verschiebungscondensator den leeren d. h. den Luft enthaltenen Flüssigkeitscondensator ersetzt;  $x_2$  gibt die Entfernung der Platten an, bei der die Capacität des Verschiebungscondensators der Capacität des gefüllten Flüssigkeitscondensators gleich ist. Der Quotient  $x_1/x_2$  ergibt die Dielectricitätsconstante  $D$  der Flüssigkeit.

Tabelle V.

Substanz	$x_1$	$x_2$	$D$	Werthe anderer Beobachter	
Petroleum	0,965	0,479	2,015	Hopkinson	2,10
				Cohn u. Arons	2,04
				Palaz	2,090—2,195
				Winkelmann	2,14
				Lecher	2,35 u. 2,42
Petroleumäth.	0,965	0,543	1,779	—	—
Terpentinöl	0,919	0,402	2,286	Winkelmann	2,22
				Tomaszewski	2,258—2,271
Xylol	0,945	0,419	2,256	Cohn u. Arons	2,36 u. 2,37
				Tomaszewski	2,383
				Tereschin	2,35
				Hopkinson	2,39
Toluol	0,954	0,414	2,304	Palaz	2,365
				Tomaszewski	3,303
				Hopkinson	2,42—2,365

## B. Messungen nach der Nebenschlussmethode.

Nach dieser Methode sind nur Dielectricitätsconstanten von Flüssigkeiten bestimmt worden. Ausser den unter A genannten Flüssigkeiten wurde noch Ricinusöl untersucht.

$W_1 / W_2$  gibt das Verhältniss der Widerstände bei der Abgleichung und somit das umgekehrte Verhältniss der zugehörigen Condensatorcapacitäten an; in den ersten Stromkreis (zu  $W_1$ ) war immer ein constanter Condensator geschaltet, in den zweiten (zu  $W_2$ ) der Flüssigkeitscondensator. Wenn dieser leer war, sind die Widerstandsbezeichnungen mit einfachem Index, wenn er gefüllt war, mit doppeltem Index versehen worden.  $W_1'' / W_2'' : W_1' / W_2'$  gibt die Dielectricitätsconstante  $D$  der Flüssigkeit.

Substanz	$W_1' / W_2'$	$W_1'' / W_2''$	$D$	Werth nach A.
Petroleum	0,2464	0,4958	2,012	2,015
Petroleumäther	1,000	1,777	1,777	1,779
Terpentinöl	0,247	0,557	2,255	2,286
Xylol	0,250	0,557	2,228	2,256
Toluol	0,2469	0,5622	2,277	2,304
Ricinusöl	0,592	2,582	4,361	(Palaz: 4,61)

Schliesslich wurde versucht, ob sich die von den Hrn. Cohn und Arons<sup>1)</sup>, Tereschin<sup>2)</sup>, Winkelmann<sup>3)</sup> Donle<sup>4)</sup> bei schlecht isolirenden Substanzen gemessene Grösse, die von ihnen als Dielectricitätsconstante angesprochen worden ist, mit Hülfe dieser Methode feststellen lässt. Die Untersuchung erstreckte sich hauptsächlich auf Alkohol.

Die Bestimmung für Alkohol wurde nach der Differential-schaltung zunächst in derselben Weise versucht wie die Messung für die unter A behandelten Flüssigkeiten. Indessen veränderte sich die Einstellung des Kohlrausch'schen Condensators überhaupt nicht, wenn zum constanten Con-

1) Cohn u. Arons, Wied. Ann. **28**. p. 454. 1886; **33**. p. 13. 1888. Cohn, Wied. Ann. **38**. p. 42. 1889.

2) Tereschin, Wied. Ann. **36**. p. 792. 1889.

3) Winkelmann, Wied. Ann. **37**. p. 161. 1889.

4) Donle, Wied. Ann. **40**. p. 307. 1890.

densator im anderen Differentialzweige der mit Alkohol gefüllte Flüssigkeitscondensator<sup>1)</sup> hinzugeschaltet wurde. Dasselbe war der Fall für einen ähnlich construirten Flüssigkeitscondensator mit grösseren Cylindern. Durch zahlreiche Wiederholungen des Versuchs wurde dies genau festgestellt.

Dem ersten Flüssigkeitscondensator entsprach bei Luftfüllung eine Verschiebung des Kohlrausch'schen Condensators um ungefähr 1 mm, dem anderen eine solche um ungefähr 1,5 mm; nahm man den Cohn'schen Werth für die Dielectricitätsconstante von Alkohol (annähernd = 25) als richtig an, so mussten die mit Alkohol gefüllten Condensatoren Verschiebungen von 0,04 mm und 0,06 mm hervorrufen; diese Verschiebungen hätten bemerkbar sein müssen, wenn die dielectricische Wirkung des Alkohol nicht durch electricische Ueberleitung der Electricität verdeckt worden wäre.

Es wurde nun versucht, durch verschiedene Abänderungen an den für die Flüssigkeitsaufnahme bestimmten Condensator ein anderes Resultat zu erreichen.

Zunächst wurde die Flüssigkeit von der einen metallischen Condensatorwand durch eine isolirende Schicht getrennt. Der innere Messingcylinder des Flüssigkeitscondensators wurde in ein etwas grösseres Becherglas gestellt, das aussen mit Stanniol bis zur Höhe des Cylinders belegt war. Diesem Condensator entsprach eine Plattenverschiebung des Kohlrausch'schen Condensators um 1,509 mm; nach Einfüllung von Alkohol war dieselbe = 0,059 mm. Nun befand sich aber zwischen den Metallbelägen ausser der Flüssigkeitsschicht noch die Glasschicht. Um den Antheil zu bestimmen, welcher der Glasschicht an der Plattenverschiebung zukam, wurde erstens verdünnte Schwefelsäure, die als Leiter betrachtet werden konnte, statt des Alkohols eingefüllt und die Messung ausgeführt; zweitens wurde der Messingcylinder ganz weggenommen, die Innenwand des Glases entsprechend dem äusseren Belage mit Stanniol belegt und für diesen Condensator die Plattenverschiebung des Kohlrausch'schen Condensators bestimmt. In beiden Fällen wurde der obige Werth von 0,059 mm mit geringen im Bereiche der Beobachtungsfehler liegenden Abweichungen gefunden. Alkohol verhielt sich demnach wieder wie ein guter Leiter.

1) Doppelcylinder aus Messing.

Hierauf wurde die Flüssigkeit von beiden Condensatorwänden durch Glasschichten geschieden. Zwei mit kleinem Spielraum in einander passende Bechergläser wurden, das kleinere innen, das grössere aussen, bis zu derselben Höhe mit Stanniol belegt und zu einem Condensator zusammengesetzt. Folgende kleine Tabelle gibt die Mittelwerthe der Verschiebungen an, die bei zwei Zusammensetzungen des Condensators erhalten wurden. Ueber der Tabelle ist notirt, womit dieser ausgefüllt war.

Luft	Alkohol	verdünnte Schwefelsäure
1,342	0,106	0,103
1,028	0,103	0,101

Hiernach verhielten sich also nicht nur zwei gleichdicke Schichten Alkohol und verdünnte Schwefelsäure gleich, sondern auch verschieden dicke Schichten. Die erhaltene Verschiebung ist demnach vollständig auf Rechnung der beiden Glasschichten zu setzen, und die dielectricische Wirkung des Alkohols wird auch hier vollständig durch seine Leitung verdeckt.

Es wurde noch ein ähnlicher Condensator wie der eben beschriebene construirt mit grösserem Hohlraum und kleinerer Oberfläche der Metallbeläge. Zugleich war das kleinere Glas fest in das grössere gekittet, sodass Quecksilber in den Zwischenraum eingefüllt werden konnte.

Folgende mittlere Plattenverschiebungen des Kohlrausch'schen Condensators wurden für diesen Condensator erhalten:

Luft	Alkohol	verdünnte Schwefelsäure	Quecksilber
3,675	0,410	0,402	0,415

Alkohol verhält sich somit bei dieser Art der Untersuchung unzweifelhaft wie ein guter Leiter.

Da Hr. Winkelmann mit seiner ähnlichen Methode einen Werth für die Dielectricitätsconstante des Alkohols gefunden hat, so wurde versucht eine Einrichtung zu treffen, die der seinigen möglichst entsprach.

$A_1$  wurde an Erde abgeleitet,  $E_1$  mit  $A_2$  verbunden und der Strom von  $E_2$  zwischen zwei Condensatoren verzweigt, deren andere Platten durch ein Telephon verbunden wurden. (Fig. 2.) Besaßen diese beiden Platten gleiche Capacitäten, so schwieg das Telephon.

Auf die eine Seite wurde nun der Vergleichscondensator, auf die andere Seite ein unveränderlicher Condensator geschaltet und abgeglichen. Hierauf wurden zum constanten Condensator die verschiedenen Flüssigkeitscondensatoren, einmal mit Alkohol dann mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt, hinzugeschaltet und die entsprechenden Aenderungen der Plattenentfernung vom Kohlrausch'schen Condensator gemessen. Auch auf diese Weise zeigte sich kein Unterschied in dem Verhalten von Alkohol und verdünnter Schwefelsäure.

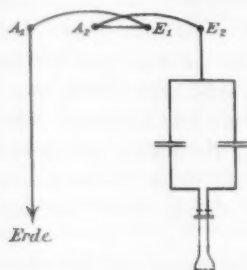


Fig. 2.

Um dem Winkelmann'schen Verfahren noch näher zu kommen, wurde schliesslich ein Condensator zur Aufnahme von Flüssigkeiten construirt, dessen Beläge gleiche Grösse hatten wie die Plattenflächen des Vergleichscondensators.

Von zwei Spiegeln wurde der Quecksilberbelag bis auf kreisförmige Flächen von jener Grösse entfernt. Der grössere dieser beiden Spiegel wurde mit dem Belage nach unten gekehrt horizontal auf drei Hartgummi-füsschen gelegt. Um den Rand der oberen Seite wurden dicke Glasstreifen gekittet, sodass ein Trog entstand. In denselben wurde unter Zwischenfügen von drei kleinen gleichdicken Glasstückchen der andere Spiegel gelegt, sodass sein Belag nach oben gekehrt war und dem anderen Belage genau gegenüber stand.

Die mittlere Dicke des Zwischenraumes zwischen den Glasplatten sei  $d$ . Wird nun dieser Condensator durch den Kohlrausch'schen Condensator mittelst der zuletzt angegebenen Schaltungsweise abgeglichen, dann zwischen die Glasplatten eine Flüssigkeit eingefüllt und wieder abgeglichen und ist hierzu eine Verschiebung um  $x$  nöthig, so ist die Dielectricitätsconstante der Flüssigkeit nach der „Gordon'schen Formel“  $D = d/(d - x)$ .

Die Schichtdicke  $d$  war schwer zu bestimmen; der Dicke der zwischenliegenden Glasstückchen entsprach sie nicht genau, da die Spiegel nicht vollkommen eben waren. Deshalb wurde zunächst der Condensator nach einander mit Alkohol und mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt, um zu untersuchen, ob beide Flüssigkeiten überhaupt verschiedene Werthe  $x$  ergaben. Dies war nicht der Fall; beide Male wurde  $x = 2,160$  mm erhalten.

Für die früher untersuchten Flüssigkeiten wurden mit diesem Condensator gute Resultate gefunden, wenn als  $d$  der Werth 2,160 angenommen wurde.

Aus allen diesen Versuchen ergibt sich, dass Alkohol sich bei Messungen nach der Methode des Hrn. Elsas wie eine gut leitende Substanz verhält.

Auch für Anilin, Nitrobenzol, Glycerin wurde dasselbe Resultat erhalten.

Grössere Dielectricitätsconstanten als ungefähr 7 für Glas konnten nicht bestimmt werden.

Die Thatsache, dass Hr. Winkelmann mit einer ähnlichen Methode die Dielectricitätsconstante von Alkohol festgestellt hat, ist nicht von entscheidender Bedeutung, da die Correctur, die er an der Schichtdicke anbringt, sehr gross ist im Verhältniss zu dem bei hohen Dielectricitätsconstanten nur kleinen Werthe  $d - x$ ; aus  $d = 2,885$  mm und  $x = 2,800$  mm ist nach der Formel  $D = d / (d - x)$  die Dielectricitätsconstante von Alkohol berechnet, während an  $d$  eine Correctur von ungefähr 0,2 mm angebracht ist.

Die Methoden von Hrn. Elsas haben sich somit für die Bestimmung der Dielectricitätsconstanten fester und flüssiger Körper mit niedriger Constante brauchbar erwiesen. An Bequemlichkeit stehen sie den bisher gebräuchlichen Methoden nicht nach. Ausser dem Kohlrausch'schen Condensator mit einer Vorrichtung zum Messen seiner Plattenverschiebungen und dem Differentialinductor mit Telephon bedarf es keiner Apparate; besonders zu construiren ist nur ein Condensator zur Aufnahme von Flüssigkeiten.

Zur Untersuchung von schlecht isolirenden Substanzen sind die Methoden nicht geeignet. —

## VI. Ueber Widerstandsmessungen mit Hülfe des Telephons; von Max Wien.

(Hierzu Tafel VIII Fig. 7—11.)

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich einige Bemerkungen darüber gemacht, dass in gewissen Fällen die Brückeneinstellungen mit dem Hörtelephon bedenklich seien und zu Fehlern Veranlassung geben könnten.

Hr. A. Elsas<sup>2)</sup> hat diese Bemerkungen durch Versuche zu entkräften versucht, welche mit dem Differentialinductor<sup>3)</sup> angestellt wurden; ich sehe mich deshalb genöthigt, mich nochmals etwas eingehender mit dieser Frage zu beschäftigen.

Bei den meisten Einstellungen mit dem Hörtelephon erreicht man nicht ein vollständiges Verschwinden des Tones, sondern nur ein Minimum. Der Grund dieser Erscheinung ist, dass neue electromotorische Kräfte in einem der Zweige auftreten, die durch Selbstinduction oder gegenseitige Induction, Capacität oder Polarisation verursacht sind.

Die Fragen, um die es sich handelt, sind folgende:

1. Fällt dieses Minimum mit dem gesuchten Nullpunkte (bei der Brücke  $w_1 w_4 = w_2 w_3$ ) zusammen?
2. Ist dieses nicht der Fall, wie hängt die Lage des Minimums von der Periode des Stromes ab?
3. Welchen Einfluss haben die Obertöne, welche, wenn man ein Inductorium als Stromquelle benutzt, immer im Telephonklange vorhanden sind (vgl. unten p. 637), auf die Minimumeinstellung?

Die Fragen sollen zuerst theoretisch behandelt werden. Ein Sinusstrom mit  $n$  Schwingungen in  $2\pi$  Secunden gehe durch

1) M. Wien, Wied. Ann. 42. p. 615—617. 1891.

2) A. Elsas, Wied. Ann. 44. p. 666. 1891.

3) A. Elsas, Wied. Ann. 35. p. 828. 1888; 42. p. 165. 1891.



die Wheatstone'sche Brücke (Taf. VIII, Fig. 7). Dann ist die Stromamplitude im Brückenzeig in der Nähe des Nullpunktes<sup>1)</sup>:

$$\alpha \text{ proportional Mod } (a_1 a_4 - a_2 a_3),$$

worin  $a_1, a_2, a_3, a_4$  die Widerstandsoperatoren der Zweige 1, 2, 3, 4 der Brücke sind.

Der Zweig 1 enthalte die merkliche Selbstinduction  $p$ , dann ist

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 w_4 - w_2 w_3)^2 + n^2 p^2 w_4^2,$$

oder, wenn man  $\delta$ , die Abweichung des Schleifcontactes vom Nullpunkt einführt:

$$\alpha^2 \text{ prop. } \delta^2 (w_1 + w_2)^2 + n^2 p^2 (w_{04} - \delta)^2.$$

Indem wir  $\partial \alpha^2 / \partial \delta = 0$  setzen, erhalten wir die Abweichung  $\delta_1$  des Minimums vom Nullpunkt:

$$\frac{\delta_1}{w_4} = \left( \frac{n p}{w_1 + w_2} \right)^2,$$

oder der Einfachheit halber  $\delta_1 / w_4 = \Delta$  und  $w_1 = w_2 = w$

$$\Delta = \left( \frac{n p}{2 w} \right)^2.$$

Analog, wenn im Zweig 1 ein Condensator mit der Capacität  $C$  || geschaltet ist:

$$\Delta = - \left( \frac{n C w}{2} \right)^2.$$

Bei einer Flüssigkeitsstelle, deren Electroden die Capacität  $c$  haben:

$$\Delta = \left( \frac{1}{2 n c w} \right)^2.$$

Die Intensität im Minimum  $\alpha_1^2$  ist, solange  $\Delta$  klein, proportional  $\Delta$ .

Es folgt hieraus, dass bei der Wheatstone'schen Brücke Minimum und Nullpunkt nicht zusammenfallen, sondern um  $\Delta$  voneinander abweichen. Wir haben es hier also mit einem „methodischen“ Fehler zu thun, neben dem zufälligen „Einstellungs“fehler, der hier deshalb erheblich ist, weil man auf ein Minimum schlecht einstellen kann. Dieser Einstellungs-

4) In betreff der folgenden Formeln vgl. M. Wien, l. c. p. 603—606 und Wied. Ann. 44. p. 690—693. 1891.

fehler wird um so grösser, je grösser der methodische Fehler  $\Delta$  ist, da, wie gesagt, die Intensität im Minimum mit  $\Delta$  wächst, und damit das Minimum weniger deutlich wird. Zwischen den beiden Fehlern ist im Folgenden scharf zu unterscheiden.  $\Delta$  ist ferner von der Periode abhängig, und zwar ist es bei Selbstinduction und  $\parallel$  geschalteter Capacität proportional  $n^2$ , bei Flüssigkeitswiderständen proportional  $1/n^2$ .

Damit sind die beiden ersten Fragen für die *Wheatstone'sche Brücke* erledigt, für welche auch meine früheren Formeln und Versuche allein gelten.

Anders liegt die Sache bei dem *Differentialinductor*, mit dem die Versuche des Hrn. Elsas ausgeführt wurden.

Derselbe besteht aus einer primären Rolle und zwei ganz gleichen secundären. Diese beiden letzteren sind, wie aus Fig. 8 ersichtlich, mit dem zu messenden (1) und dem Vergleichswiderstand (2) verbunden. Wenn, wie vorausgesetzt, die inducirte electromotorische Kraft in beiden Zweigen dieselbe ist, so ist die Stromamplitude  $\alpha$  im Telephonzweig in der Nähe des Nullpunktes:

$$\alpha \text{ prop. Mod. } (a_1 - a_2).$$

Hierin ist (vgl. Fig. 9), indem der Einfachheit halber die gegenseitige Induction nicht berücksichtigt wird:

$$a_1 = W_1 + w_1 + in(P_1 + p), \quad a_2 = W_2 + w_2 \text{ in } P_2.$$

$W_1 = W_2$ ,  $P_1 = P_2$  Widerstand und Selbstpotential der beiden secundären Rollen.  $w_1$  und  $w_2$  der zu messende und der Vergleichswiderstand; ersterer habe die merkliche Selbstinduction  $p$ .

Dann ist:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 - w_2)^2 + n^2 p^2.$$

Offenbar ein Minimum für  $w_1 = w_2$ , also fällt Minimum und wahrer Nullpunkt zusammen.  $\Delta = 0$ .

Bei einer  $\parallel$  geschalteten Capacität:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_2 - w_1)^2 + n^2 C^2 w_1^2 w_2^2. \quad \Delta = 0.$$

Bei einem Flüssigkeitswiderstand:

$$\alpha^2 \text{ prop. } (w_1 - w_2)^2 - \frac{1}{n^2 w^2 c^2}. \quad \Delta = 0.$$

Offenbar liegt hierin ein Vorzug des Differentialinductors gegenüber der Brückenmethode.

In den meisten Fällen dürfte indessen infolge der nicht ausgeglichenen electrostatischen Capacität der beiden secundären Rollen<sup>1)</sup>, infolge gegenseitiger Induction, bei Flüssigkeitswiderständen auch infolge einer Phasendifferenz des Polarisationsstromes<sup>2)</sup> das Minimum doch etwas verschoben sein, was an einer unsymmetrischen Aenderung der Klangfarbe um das Minimum herum merklich ist. Diese Fälle werden sich experimentell leicht unter die analogen bei der Wheatstone'schen Brücke (vgl. unten p. 631—634) unterordnen lassen. Je nachdem der Fehler mit der Schwingungszahl wächst oder abnimmt. Immerhin sind hier die Einflüsse, welche eine Verschiebung des Minimums bewirken, secundärer Natur: die Hauptquelle der methodischen Fehler fällt bei dem Differentialinductor fort. Es ist deshalb durchaus verständlich, weshalb Hr. Elsas diese Fehler, welche sich, wie wir unten sehen werden, in den meisten Fällen überhaupt nur schwer mit Sicherheit experimentell nachweisen lassen, nicht hat bemerken können.

Im Folgenden wende ich mich wieder ausschliesslich der allgemeiner gebräuchlichen Wheatstone'schen Brücke zu, um zu untersuchen, welchen Einfluss experimentell die oben theoretisch berechnete Abweichung des Minimums auf die Widerstandsmessung hat.

Arbeitet man mit einer Stromquelle, die annähernd reine Sinusströme liefert (Sinusinductor oder Wechselstrommaschine) und Hörtelephon, so verläuft das Experiment genau nach den obigen Formeln: das Minimum erscheint verschoben; jedoch ist auch bei starker Selbstinduction etc. eine Einstellung noch immer möglich, obgleich mit  $\Delta$  auch die Tonintensität im Minimum wächst und dadurch die Einstellung ungenau wird. So erhielten Bouty und Foussereau<sup>3)</sup>, die mit einer Wechsel-

1) Dieselbe ist auch von Hrn. Elsas selbst störend empfunden. l. c. p. 168.

2) Auf die Wirkung dieser Phasendifferenz habe ich schon früher hingewiesen l. c. 1. p. 618. Ich hoffe darüber bald näheres bringen zu können.

3) Bouty u. Foussereau, Journ. de phys. (2) 4. p. 419. 1888.

strommaschine arbeiteten, bei grossen Neusilberwiderständen, welche wohl nicht sehr sorgfältig gewickelt waren, Abweichungen bis zu 20 Proc. vom Nullpunkt. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich diese Differenz zwischen Nullpunkt und Minimum benutzt, um mit Hülfe des optischen Telephons Selbstpotentiale von Rollen zu bestimmen. In bezug auf bifilar gewickelte Neusilberwiderstände erwähne ich noch, dass ich bei den damals benutzten Rheostaten von Hartmann & Braun und von Siemens & Halske bei Widerständen bis zu 1000 Ohm keinen merklichen Einfluss von Selbstinduction oder Capacität auf den Strom von 256 Schwingungen per Secunde habe feststellen können.

Im allgemeinen wird jedoch nicht ein Sinusstrom, sondern der Strom eines Inductoriums angewendet, dessen primäre Leitung durch einen akustischen Stromunterbrecher geöffnet und geschlossen wird.

Der Strom eines Inductoriums lässt sich als eine Summe von Sinusströmen darstellen:

$$a_1 \sin nt + a_2 \sin 2nt + a_3 \sin 3nt \dots$$

Jeder von diesen Sinusströmen geht für sich gesondert durch das System und ist im Telephon als Oberton hörbar. Dazu kommen noch die bei jeder Stromunterbrechung auftretenden, schnell verschwindenden, electricischen Eigenschwingungen des Systems, welche Lenard<sup>2)</sup> als das „Telephongeräusch“ bezeichnet und deren Schwingungszahl sehr hoch ist. — Ich komme hiermit zu der dritten Frage: Welchen Einfluss haben die *Obertöne* auf die Einstellung mit dem Hörtelephon?

Im allgemeinen sind die Amplituden dieser höheren Schwingungen viel kleiner als die des Grundstromes. Ihre Stärke hängt von dem Widerstande und den Inductionscoefficienten des Inductoriums und der Brückenverzweigung ab, ferner auch von der Art und Weise der Unterbrechung (Contact, Nebenschluss).

Hingegen ist das Hörtelephon empfindlicher für höhere Töne, theils wegen der hohen Eigentöne der Platte, theils aus

1) l. c. 1. p. 605—610.

2) Lenard, Wied. Ann. 39. p. 619. 1890.

theoretischen Gründen.<sup>1)</sup> Ebenso ist auch das menschliche Ohr für höhere Töne empfindlicher, wie für tiefere.

Infolgedessen sind die Obertöne noch immer stark genug, um die Einstellung zu beeinflussen. Ich habe mich davon überzeugt, indem ich mit verschiedenen Inductorien, Unterbrechungsarten, Telephonen arbeitete, schliesslich auch dieselben Einstellungen von verschiedenen Beobachtern machen liess: Die Einstellung hängt erst in zweiter Linie von der relativen Stärke der höheren Ströme zum Grundstrom ab, am meisten jedoch von der Lage der verschiedenen Tonminima zu einander. Die Gründe werden aus dem Folgenden sofort erhellen.

Es sei zunächst ein merkliches *Selbstpotential* oder *geschaltete Capacität* im Zweig 1 der Brücke. Dann ist  $\Delta = (np/2w)^2$ , resp.  $-(nCw/2)^2$  also proportional  $n^2$  (p. 627). Demnach liegt, wenn das Minimum des Grundtones in der Entfernung 1 vom Nullpunkt ist, das des ersten Obertones in der Entfernung 4, des zweiten 9 etc.; ebenso verhalten sich auch ihre relativen Minimalintensitäten.

In der beistehenden Zeichnung (Fig. 10) ist die Abscisse der Brückendraht selbst, die Ordinate die Tonintensität, wobei der Einfachheit halber angenommen ist, dass die Intensität jedes Obertones in dem Strome des Inductoriums ursprünglich gleich der des Grundtones sei, was natürlich nicht der Fall ist.

Die Minima des Grundtones und der tieferen Obertöne liegen dicht bei einander in der Nähe des Nullpunktes, die der höheren in grösseren Abständen und sie sind weniger ausgeprägt; es folgt daraus, dass die Einstellung auf das *Minimum des Grundtones* geschieht, nur durch die benachbarten Minima der tieferen Obertöne ein wenig verschoben.

Die höheren Obertöne erscheinen hier hauptsächlich als störendes Nebengeräusch, welches sich gleichmässig über das ganze Minimum des Grundtones ausdehnt. Da, wie gesagt, die Intensität der Töne im Minimum proportional  $n^2$  zunimmt, so ist dieses Geräusch schon bei sehr kleiner Selbstinduction oder Capacität so stark, dass die Einstellung sehr schwierig wird. Bei kleinen Widerständen genügt hierzu schon die Selbstinduction der geraden Verbindungsdrähte. Bei grösseren bifi-

1) Helmholtz, Wiss. Abh. 1. p. 474.

laren Neusilberwiderständen macht sich die electrostatische Capacität bemerklich. So erhielt Hr. Elsas<sup>1)</sup> bei Widerständen über 500 Siemens ein schlechtes Minimum. Bedeutend erschwert wurde die Einstellung noch, als er zu 1000 S. einen Kohlrausch'schen Condensator || schaltete, dessen Platten 1 cm auseinanderstanden. Bei einem Plattendurchmesser von 15 cm bedeutet dies eine Capacität von ca.  $1,5 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2$  (electr. mag.). Nach unserer Formel  $\alpha^2$  proportional  $(w_1 - w_2)^2 + n^2 C^2 w_1^2 w_2^2$  (p. 628) würde diese Capacität für den angewandten Grundton (ca. 100 Unterbrechungen pro Sec.) einen ebenso grossen Strom verursachen wie eine Widerstandsänderung um ca. ein Hunderttausendstel sich also gänzlich der Beobachtung entziehen. Man kann hieraus einen Schluss auf die Schwingungszahl der wirksamen Töne ziehen, welche etwa von der Ordnung 5000 sein muss.

Sobald die Selbstinduction oder Capacität irgend grösser wird, so ist eine Einstellung überhaupt ausgeschlossen; solange eine solche noch möglich, ist daher die Verschiebung des Grundtonminimums sehr klein, und da hier auf dieses eingestellt wird, so ist auch der methodische Fehler sehr klein, jedenfalls verschwindend neben dem Einstellungsfehler.

Gegen die Anwendung des Hörtelephons für Messung metallischer Widerstände lässt sich somit nur einwenden, dass der Einstellungsfehler infolge schlechten Minimums leicht sehr gross wird. Derselbe ist übrigens, wie schon mehrfach vorgeschlagen, leicht zu umgehen, indem man einen constanten Strom durch das System schickt und den Brückenweig unterbricht, entweder auch akustisch oder besser mit der Hand, mit Hülfe eines Quecksilbercontactes. Eine Genauigkeit von  $\frac{1}{10}$  Proc. ist hierbei meist leicht zu erzielen und man ist unabhängig von Selbstinduction und Capacität.

Die Wechselstrommethode kommt eigentlich praktisch nur bei der Messung von *Flüssigkeitswiderständen* in Betracht. Der Fehler ist hier:  $\Delta = (1/(2ncw))^2$ , also umgekehrt proportional  $n^2$ . Der Grundton liegt am weitesten vom Nullpunkt entfernt und die Minimalintensität desselben ist die grösste. Je höher die Obertöne sind, desto näher fallen sie einander und dem Null-

1) Elsas, l. c. p. 674.

punkt (Fig. 11). In demselben Verhältnisse sinkt ihre Minimalintensität, sodass dieselbe leicht unter der Reizschwelle liegen kann. Die Einstellung erfolgt wesentlich auf das *Minimum der höheren Töne*<sup>1)</sup>, wo eine scharf markirte Aenderung der Klangfarbe eintritt, dadurch, dass ein grosser Theil der höheren Obertöne nahezu gleichzeitig ausfällt, resp. wieder auftritt. Der Grundton und die tieferen Obertöne erscheinen hier als störendes Nebengeräusch, welches sich über das Minimum der höheren Töne lagert.

Man kann die ganze Erscheinung sowohl mit dem Ohre heraushören, indem man die Aenderung der Klangfarbe um das Minimum herum beobachtet, wie auch direct messend verfolgen, indem man die Einstellung mit dem Hörtelephon mit derjenigen des optischen Telephons (Minimum des Grundtones) vergleicht: es ergibt sich immer eine messbare Differenz je nach der Grösse der Polarisirung. Damit das Minimum des Hörtelephons einigermaassen scharf hervortritt, darf die Polarisirung nur sehr schwach sein; ich wandte zu den folgenden Versuchen ein Kohlrausch'sches Widerstandsgefäss mit ca. 35 qcm grossen, gut platinirten Electroden an bei einem Flüssigkeitswiderstande von ca. 50 Ohm und einer Schwingungszahl des Grundtones von 256 pro Secunde. Die Differenz zwischen den beiden Einstellungen betrug nur ca. 0,1 Proc. Jedoch wächst dieselbe sehr schnell mit der Schwingungsdauer des Grundtones und der Polarisirung.

Da hier auf das Minimum der höheren Töne eingestellt wird, so ist es für die Schärfe der Einstellung vortheilhaft, wenn die höheren Töne möglichst stark im Verhältniss zum Grundtone sind. Ostwald<sup>2)</sup> hat dies experimentell beobachtet und räth, ein Inductorium anzuwenden, dessen Strom möglichst von der Sinusform abweicht (Entfernung der Messinghülse um den Eisendrahtkern).

Die Minima der höheren Töne rücken dem Nullpunkt immer näher (Fig. 11), infolgedessen ist der durch die Polarisirung selbst hervorgerufene Fehler verschwindend. Hingegen

1) Es gilt dies nur bei Anwesenheit von Polarisirung und ist auch in meiner früheren Arbeit nur für diesen Fall behauptet worden.

2) Ostwald, Ztschr. f. phys. Chem. 2. p. 561.



ist es gefährlich, wenn gleichzeitig in einem der vier Zweige Selbstinduction oder  $\parallel$  geschaltete Capacität vorhanden ist, da dadurch die Minima der höheren Töne auseinandergerissen werden.  $\Delta = (np/2w)^2$ , resp.  $-(nCw/2)^2$ ; wegen der hohen Schwingungszahlen genügen hierzu schon kleine  $p$  und  $C$ . Die Folgen davon sind: ein verwaschenes Minimum und damit ein grosser Einstellungsfehler, und ferner auch methodische Fehler.

Es ist hierbei zu unterscheiden, ob die Selbstinduction in den Zweigen 1 und 4 oder in den Zweigen 2 und 3 der Brücke auftritt (vgl. Fig. 7, die Flüssigkeitszelle ist immer im Zweig 1 vorausgesetzt). Im ersten Falle werden die Minima der höheren Töne nach der Seite des Minimums des Grundtones hin verschoben in (Fig. 11 nach rechts). Es treten also die in Fig. 10 und 11 dargestellten Erscheinungen gleichzeitig auf. Der Flüssigkeitswiderstand erscheint hier offenbar zu gross. Bei kleiner Selbstinduction ist die Einstellung noch scharf, ja sie kann sogar unter Umständen schärfer sein, wie ohne Selbstinduction<sup>1)</sup>, da die Minima mehr auf einem Haufen liegen. Bei irgend grösserer Selbstinduction z. B. der, welche genügt, um die Polarisirung für den Grundton zu compensiren<sup>2)</sup>, ist keine Einstellung mehr möglich.

In dem anderen Falle Selbstinduction im Zweig 2 oder 3 werden die Minima der höheren Töne über den Nullpunkt hinaus verschoben (Fig. 11 nach links). Dadurch wird das Gesamtminimum ein sehr breites und der Einstellungsfehler sehr gross. Die Einstellung kann überall innerhalb desselben erfolgen. Wer, wie ich, sich mit der Zeit daran gewöhnt hat, das Minimum der höheren Töne aufzusuchen, dürfte meist über den Nullpunkt hinaus einstellen. Der Flüssigkeitswiderstand erscheint dann zu klein. Die Einstellung ist hier abhängig von der Person des Beobachters und von der Zusammensetzung des Inductionsstromes, also von der Reinheit der Quecksilberoberfläche des Unterbrechers etc. Dieser Fall vor allem ist bei der Messung von Flüssigkeitswiderständen zu vermeiden. Es ist zu diesem Zwecke anzurathen, von vornherein im Zweig 1 eine kleine Drahtrolle anzubringen, um die eventuell im Zweig 2

1) Wietlisbach, Berl. Monatsber. 1879. p. 278; Fink, Wied. Ann. 26. p. 492. 1885.

2) M. Wien, l. c. 1. p. 613—614.

oder 3 vorhandene Selbstinduction zu compensiren.<sup>1)</sup> Es genügt zu diesem Zwecke ein in 10—20 Windungen um ein dickes Reagenzglas gewickelter Kupferdraht, worin man einen Eisenkern verschieben kann, um das Selbstpotential variabel zu machen.

Sehr hervortretend ist die verschiedene *Klangfarbe*<sup>1)</sup> um das Minimum herum in den beiden eben charakterisirten Fällen; man kann dieselbe leicht beobachten, indem man ein kleines Selbstpotential in den Zweig 3, resp. 4 einschaltet. Die Selbstinduction der Kohlrausch'schen Brückenwalze genügt vollkommen zu diesem Zweck: Die Einstellung ist immer leichter, wenn man in der ersten Hälfte der Walze einstellt (Mehrzahl der Windungen im Zweig 4), als wenn man sich im letzten Theile derselben befindet (Mehrzahl der Windungen im Zweig 3).

Um bei Untersuchung dieser Frage immer unter denselben Widerstandsverhältnissen zu arbeiten, traf ich folgende Anordnung: Der Flüssigkeitswiderstand und der Vergleichswiderstand wurden einander ungefähr gleich gemacht. Die Walze (ca. 13 Ohm Widerstand) befand sich das eine mal im Zweig 4; 12 Ohm inductionsfreier Rheostatenwiderstand im Zweig 3 das Minimum lag also an dem einen Ende des Walzendrahtes (Fall 1).

Fall 2. Walze im Zweig 3, 12 Ohm im Zweig 4.

Fall 3. Walze zur Hälfte im Zweig 3, zur Hälfte im Zweig 4, 6 Ohm auf beiden Seiten zugeschaltet (hier compensiren sich die beiden Selbstpotentiale in den beiden Zweigen).<sup>2)</sup>

Obgleich das Selbstpotential der Brückenwalze im Vergleich zu ihrem Widerstande sehr gering ist (ca.  $10^4$  cm), sodass dasselbe auf den Grundton nur einen eben merklichen Einfluss ausübt, so ist die Wirkung auf die hohen Töne doch eine so markante, dass die Verschiedenheit der Klangfarbe um das Minimum in den drei Fällen sofort allen Beobachtern auffiel. Besonders klagten dieselben, wie nach Obigem zu er-

1) Es ist bei diesen Versuchen unerlässlich, dass man dafür sorgt, dass der Verlauf des Inductionstromes während des Versuches derselbe bleibt, weil sonst schon von selbst eine Aenderung der Klangfarbe eintritt. Deshalb ist statt des unsicheren Federcontactes der Inductoren ein möglichst reiner Quecksilbercontact zu empfehlen, als Unterbrecher eine Stimmgabel oder Saite von nicht zu kleiner Schwingungszahl.

2) Maxwell, Electr. and Magn. 2. § 759.

warten, über ein sehr schlechtes Minimum im Fall 2. Der Einstellungsfehler war hier etwa der fünffache, wie in den anderen Fällen.

Der *methodische Fehler*, welcher hierbei die Verschiebung der Minima der höheren Töne durch die Selbstinduction verursacht, ist deshalb schwierig zu messen, weil er durch den Einstellungsfehler verdeckt wird, der, sowie man die Polarisirung grösser nimmt, auch schnell wächst.

Es gelang in folgender Weise denselben zu beobachten: Die kleine Selbstinduction der Brückenwalze hat auf das optische Telephon, welches nur auf den Grundstrom reagirt, wie gesagt, keinen merklichen Einfluss. Demnach geschahen die Einstellungen mit demselben in den drei obigen Fällen, welche sich nur durch die Lage des Selbstpotentials unterschieden, immer unter den gleichen Verhältnissen und konnten als Fixpunkte angesehen werden. Es ergaben sich in den drei Fällen verschiedene Differenzen mit den Einstellungen des Hörtelephons, also auch Differenzen zwischen den Hörtelephoneinstellungen untereinander, mithin verschiedene Werthe für denselben Flüssigkeitswiderstand. Zwischen den Fällen 1 und 2 betrug die Differenz bei verschiedenen Beobachtern im Mittel mehr als das doppelte des Einstellungsfehlers. Im Fall 2 war, wie gesagt, der Einstellungsfehler so gross, dass die Differenz nicht zahlenmässig festgestellt werden konnte.

Bei grossen Widerständen tritt auch die electromotorische Capacität der bifilaren Neusilberdrahtrollen in Wirksamkeit. Da die Erscheinung durchaus analog ist, so brauche ich sie nicht besonders zu besprechen.

Es soll mit dem Vorstehenden kein Einwand gegen die Kohlrausch'sche Methode zur Messung von Flüssigkeitswiderständen mit Wechselstrom und Hörtelephon erhoben werden; im Gegentheil gestattet die Einstellung auf die hohen Obertöne noch bei verhältnissmässig starker Polarisirung Widerstände zu messen, wo bei Anwendung von Sinusinductor und Dynamometer schon grössere Fehler sich merklich machen würden. Es sollte nur nachgewiesen werden, dass methodische Fehler auftreten *können* und die Art und Weise ihrer Entstehung klar-

gelegt werden. Dieselben sind secundärer Natur und meist klein; in meinem Falle hielten sie sich immer innerhalb 0,1 Proc. Allerdings wachsen sie schnell mit der Schwingungsdauer des Grundstromes und der Stärke der Polarisation. „Bedenklich“ sind dieselben nur deshalb, weil sie schwer zu erkennen und ganz zu vermeiden sind, und sie innerhalb derselben Versuchsreihe, je nach der Beschaffenheit der in den drei anderen Zweigen benutzten Widerstände nach verschiedener Richtung ausfallen können.

Gefährlicher wie bei Widerstandsmessungen ist die Benutzung des Hörtelephons beim Vergleich der Selbstpotentiale von Rollen<sup>1)</sup> und der Capacitäten von Condensatoren, worauf ich schon an anderer Stelle<sup>1)</sup> hingewiesen habe.

Würzburg, Phys. Inst. d. Univ., Sept. 1892.

---

2) M. Wien, l. c. 2. p. 710—712.

## VII. Die Zerstreuung des Lichtes durch matte Oberflächen<sup>1)</sup>; von Christian Wiener.

(Hierzu Tafel IX.)

### Geschichtliches und Wesen der Zerstreuung.

Zu den in dieser Abhandlung zu beschreibenden und zu erörternden Untersuchungen über die Lichtzerstreuung durch matte Körperoberflächen wurde ich durch die in meinem Lehrfache der darstellenden Geometrie liegende Aufgabe geführt, Körper mit ihren Helligkeitsgraden abzubilden. Die bisherigen ausgiebigsten Quellen theoretischer und experimenteller Untersuchungen, welche Grundlagen für die Lösung dieser Aufgabe bieten, findet man immer noch in zwei Werken aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts, in Lamberts<sup>2)</sup> Photometrie und in und in Bouguers Optik.<sup>3)</sup> Dieselben sind für jene Zwecke bisher kaum verwerthet worden, und ich habe in meiner darstellenden Geometrie<sup>4)</sup> versucht, sie in höherem Grade auszunutzen. Während nun, wie allgemein anerkannt wird, die Beleuchtungsstärke eines Elementes der beleuchteten Fläche gleich der Stärke des beleuchtenden Lichtes, getheilt durch das Quadrat seines Abstandes vom Elemente, und vervielfacht mit dem Cosinus des Einfallswinkels  $\epsilon$  ist, so ist die Helligkeit, in welcher das Element dem betrachtenden Auge erscheint, mit jener Beleuchtungsstärke und mit dem Rückstrahlungsvermögen (Albedo bei Lambert) proportional. Aber auch die Richtung, in welcher man das Element betrachtet, kann von Einfluss sein. Diesen Einfluss bestimmt Lambert durch das nach ihm benannte Lambert'sche oder Cosinusgesetz, nach welchem ein Flächenelement, welches das empfangene Licht zerstreut,

1) Diese und die folgende Abhandlung wurden zuerst veröffentlicht in der Festschrift der Technischen Hochschule zu Karlsruhe zum 40jährigen Regierungsjubiläum Sr. Königlichen Hoheit des Grossherzogs Friedrich von Baden, im April 1892. In dieser neuen Veröffentlichung sind einige wenige Aenderungen vorgenommen und Zusätze zugefügt.

2) Lambert, photometria, Augsburg 1760.

3) Bouguer. essai d'optique, Paris 1729, u. traité d'optique, Paris 1760.

4) Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I, 1884, p. 55 und 390 ff.

unter dem Rückwerfungs- oder Ausfallswinkel  $\alpha$  eine Lichtmenge zurückwirft, die mit  $\cos \alpha$  proportional ist. Da aber die scheinbare Grösse des Elementes ebenfalls mit  $\cos \alpha$  proportional ist, so ist nach dem Lambert'schen Gesetze die Helligkeit einer matten Fläche unabhängig von  $\alpha$ , oder die Fläche erscheint unter derselben mit  $\cos \varepsilon$  proportionalen Helligkeit, von welcher Seite man sie auch betrachten mag.

Dass das Lambert'sche Gesetz aber nicht allgemein richtig ist, geht schon aus den Beobachtungen von Bouguer hervor. Er fand auf eine Weise, die wir bei unseren später anzugebenden Versuchen ebenfalls befolgt haben, dass bei nahe übereinstimmender Beleuchtungs- und Sehrichtung, also bei  $\varepsilon = \alpha$ , die Helligkeit nicht mit  $\cos \varepsilon$  proportional ist, wie es nach Lambert sein sollte, sondern dass sie mit wachsendem  $\varepsilon$  schneller als mit  $\cos \varepsilon$  abnimmt. Die folgende Tabelle enthält Bouguer's Ergebnisse und zur Vergleichung auch die Werthe von  $\cos \varepsilon$ , sowie auch die von  $\cos^2 \varepsilon = \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$ .

Ein- und Ausfallswinkel $\varepsilon = \alpha$	Beobachtete verhältnissmässige Helligkeit von			1000 $\cos \varepsilon$	1000 $\cos^2 \varepsilon$
	mattem Silber	Gyps	holländ. Papier		
0°	1000	1000	1000	1000	1000
15	802	762	971	966	933
30	640	640	743	866	750
45	455	529	507	707	500
60	319	352	332	500	250
75	209	194	203	259	67

Bei Abbildungen wird das Lambert'sche Gesetz, obgleich es nicht genau ist, doch fast ausschliesslich und mit guter Wirkung angewendet. Nach ihm ist also die Helligkeit proportional mit  $\cos \varepsilon$ . Ausserdem wurde aber vorgeschlagen, die Helligkeit proportional mit  $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$ , und andererseits, sie proportional mit  $\cos \varepsilon : \cos \alpha$  zu setzen. Die Linien einer krummen Fläche, entlang welcher  $\cos \varepsilon$  oder die Stärke der Beleuchtung unveränderlich ist, heissen die Lichtgleichen oder Isophoten, und die Linien, entlang welcher  $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$  unveränderlich ist, hat Burmester<sup>1)</sup> Isophengen, das wäre Helle gleichen, genannt. Sie wurden zuerst für eine Kugel construirt

1) Burmester, Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen, p. 259. 1871.

von Schülern Monge's<sup>1)</sup>, dann für viele Flächen von Burmester. Diese Annahme von  $\cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$  ist aber jedenfalls unrichtig; denn nach ihr wäre für  $\alpha = 90^\circ$ , oder für Stellen, wo die Sehstrahlen die Fläche berühren, d. i. für den Umriss, die Helligkeit gleich Null, was dem nächstliegenden Augenscheine widerspricht. — Die Annahme  $\cos \varepsilon : \cos \alpha$  wurde von Brisson<sup>2)</sup> vorgeschlagen. Nach ihr müsste der Umriss am hellsten erscheinen und wirklich beruft sich Brisson darauf, dass der Umriss des Vollmondes am hellsten erscheint, obgleich an ihm auch zugleich die Licht- und Schattengrenze liegt, also die Beleuchtungsstärke am geringsten ist. Allein Bouguer und Zöllner erklären diese Erscheinung in naheliegender Weise durch die starken Unebenheiten der Mondoberfläche; und wirklich zeigt auch ein Körper mit glatter aber matter Oberfläche durchaus nicht einen helleren Umriss, wie auch die folgenden Versuche bestätigen, besonders aber nicht, wenn der Umriss zugleich die Licht- und Schattengrenze bildet.

Neuerdings hat auch Hr. Seeliger<sup>3)</sup> Versuche veröffentlicht, nach denen das Lambert'sche Gesetz für beleuchtete matte Oberflächen nicht richtig ist.

Sodann hat Hr. Lommel<sup>4)</sup> theoretische Untersuchungen über die Lichtzerstreuung angestellt, wobei er nach dem Vorgehen Fouriers von der Anschauung ausgeht, dass diese Zerstreuung nicht von der Oberfläche, sondern von Raumtheilen der Körpermasse hervorgebracht wird, wie auch die Färbung des zerstreuten Lichtes es fordert. Für undurchsichtige feste glühende Körper kommt er dann zu dem Cosinusetz; denn die Länge des im Innern des Körpers von einem Lichtstrahle bis zu seiner vollen Absorption zurückgelegten Weges ist nur von dem Absorptionsvermögen, nicht aber von

1) Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les dessins. Journ. de l'école polyt., cah. 1. Paris an III (1797).

2) Zusatz von Brisson zu einem Vortrage von Monge, worin dieser die Beleuchtungsstärke mit  $\cos \varepsilon$  proportional setzt, enthalten in der 5. Auflage von Monge, géométrie descriptive (1827), veranstaltet von Brisson.

3) Seeliger, über das Lambert'sche Gesetz der Photometrie. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft Jahrg. 20. p. 267. 1885.

4) Lommel, über Fluorescenz. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 10. p. 449. 1880.



dem Ausfallswinkel  $\alpha$  abhängig, so dass die senkrechte Tiefe dieser lichtzerstreuenden Schicht und damit die Menge des zerstreuten Lichtes mit  $\cos \alpha$  proportional sein muss. Dies Ergebniss wurde von Hrn. Möller<sup>1)</sup> durch Beobachtungen an glühenden Metallplatten bestätigt. Herr Lommel bestimmt auf dieser Grundlage die Stärke des Fluorescenzlichtes, wobei er ausserdem dem einfallenden Strahle den entsprechenden Einfluss auf die Endformel zuschreibt. In einer späteren Abhandlung<sup>2)</sup> hat Hr. Lommel die Helligkeit zerstreut reflectirender Stoffe untersucht und dabei die allmähliche Absorption des in das Innere bis zu einer gewissen Tiefe eindringenden Lichtes und die Wiederausstrahlung desselben verfolgt. Er kommt dabei<sup>3)</sup> zu einer Formel für die Stärke des zurückgeworfenen Lichtes, welche ausser von dem Absorptions- und Diffusionsvermögen der Substanz und von der Dicke der diffundirenden Schicht, — welche Dicke aber nur einen Einfluss ausübt, solange die Schicht ganz dünn ist, — nur von dem Ein- und Ausfallswinkel ( $\epsilon$  und  $\alpha$ ) abhängt, und in bezug auf diese Winkel symmetrisch ist, sodass die Menge des von einem Flächenelemente zurückgeworfenen Lichtes sich nicht ändert, wenn man den einfallenden und den ausfallenden Strahl miteinander vertauscht.

Diese Ergebnisse sind unter der stillschweigenden Voraussetzung gewonnen, dass eine Spiegelung durchaus nicht stattfindet, dass also die Oberfläche vollkommen matt oder rauh ist. Und für diese werden sie auch durch ausgedehnte Beobachtungen des Hrn. Ångström<sup>4)</sup> bestätigt, welche derselbe in dem physikalischen Institute in Strassburg über die Zerstreuung strahlender Wärme machte. Er stellte durch Berührung mit verschiedenartigen Stoffen oder durch Absetzen aus einer Suspension vollkommen matte oder raue Oberflächen her, welche selbst bei grossem Einfallswinkel keine Spiegelung erkennen

1) Möller, experimentelle Untersuchung des Lichtemanationsgesetzes glühender Körper. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. **24**. p. 266. 1885.

2) Lommel, die Photometrie der diffusen Zurückwerfung. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **36**. p. 473. 1889.

3) p. 488 u. 489.

4) Ångström, über die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen. Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. **26**. p. 253. 1885.

liessen, und fand bei ihnen jene Sätze mit guter Annäherung bestätigt. Andere Stoffe, wie Papier und gegossener Gyps liessen dagegen eine vermehrte Zurückwerfung in der Richtung der Spiegelung erkennen.

Ueber derartige nicht vollkommen matte Körperoberflächen, die man als matte und glatte bezeichnen kann, erstreckt sich das Giltigkeitsbereich der Lommel'schen Formel nicht. Bei solchen Flächen hat vielmehr noch die Neigung  $\nu$  der Einfallslinie gegen die Ausfallsebene einen wesentlichen Einfluss. Denkt man sich unter diesen Ebenen nicht je eine unbegrenzte Ebene, sondern nur den rechten Winkel, dessen einer Schenkel die Normale des fraglichen Flächenelementes ist, dessen anderer Schenkel daher in diesem erweiterten Elemente liegt, und welcher rechte Winkel den einfallenden, beziehungsweise den ausfallenden Strahl in sich einschliesst, so bilden die Einfallslinie und Ausfallsebenen einen Winkel  $\nu$ , der zwischen  $0$  und  $180^\circ$  schwankt und das *Azimuth* beider Strahlen heissen mag. Dieses Azimuth ist nach Lommel's Formel ohne Einfluss; es muss nach ihr bei bestimmt gegebenem Einfallswinkel dieselbe Helligkeit herrscht in allen Richtungen desselben Ausfallswinkels, welche Richtungen einen Umdrehungskegel bilden. Dies gilt nach Angström nahezu für Wärmestrahlung durch raue, nicht aber bei nur matten Flächen, wie bei gegossenem Gyps und Briefpapier. In Uebereinstimmung mit dem letzteren ist nach meinen Versuchen mit gegossenem Gyps unter den Richtungen jenes Kegels die Helligkeit am grössten bei dem Strahle, welcher dem gespiegelten am nächsten liegt ( $\nu = 180^\circ$ ), und am kleinsten bei demjenigen, welcher dem einfallenden am nächsten liegt ( $\nu = 0^\circ$ ). So ergab sich für  $\varepsilon = 75^\circ$  und  $\alpha = 75^\circ$  die Helligkeit  $H = 2,04$  für  $\nu = 180^\circ$  und  $H = 0,22$  für  $\nu = 0^\circ$ , wenn die Helligkeit bei senkrechter Bestrahlung und senkrechtem Beschauen ( $\varepsilon = \alpha = 0^\circ$ ) als Einheit angenommen wird. Während ferner bei Angström's Versuchen an rauhen Oberflächen sich die ausgestrahlte Wärmemenge nur wenig änderte, wenn  $\varepsilon$  und  $\alpha$  miteinander vertauscht wurden, fand ich bei Gyps eine starke Aenderung der Helligkeit bei dieser Vertauschung. So ergab sich bei  $\nu = 180^\circ$ , wenn also der einfallende und der ausfallende Strahl auf entgegengesetzten Seiten der Flächennormale lagen, für  $\varepsilon = 15^\circ$ ,

und  $\alpha = 75^\circ$ ,  $H = 0,83$ , dagegen für  $\epsilon = 75^\circ$  und  $\alpha = 15^\circ$ ,  $H = 0,22$ ; und für  $\epsilon = 0^\circ$  und  $\alpha = 75^\circ$ ,  $H = 0,76$ , dagegen für  $\epsilon = 75^\circ$  und  $\alpha = 0^\circ$ ,  $H = 0,24$ . Ein kleiner Einfalls- und ein grosser Ausfallswinkel brachte also eine grössere Helligkeit hervor, als ein grosser Einfalls- und ein kleiner Ausfallswinkel. An der Grenze war bei streifender Bestrahlung ( $\epsilon = 90^\circ$ ) und senkrechtem Beschauen ( $\alpha = 0^\circ$ ) natürlich  $H = 0$ , aber bei streifendem Beschauen ( $\alpha = 90^\circ$ ) und senkrechter Bestrahlung ( $\epsilon = 0^\circ$ ) herrschte noch die beträchtliche Helligkeit  $H = 0,59$ . Die beiden auf Messung beruhenden Curven der späteren Figur 2 müssten gleich sein, wenn  $\epsilon$  und  $\alpha$  vertauschbar wären; sie sind aber sehr verschieden.

Zur Erklärung der Strahlenzerstreuung durch matte Körperoberflächen dienten zwei Anschauungen. Die eine ist die erwähnte des Eindringens der Erschütterung durch den Strahl bis zu einer gewissen Tiefe, und des Ausstrahlens dieser Erschütterung aus der durchdrungenen Körperschicht nach allen Richtungen. Diese Anschauung ist gestützt durch die Farbe, welche die matten Körperoberflächen besitzen, sowie durch mannigfache Versuche, so auch durch die von Ångström<sup>1)</sup>, nach welchen die Diffusion mit der Dicke der auf eine zuvor berusste Fläche aufgelegten rauhen Schicht bis zu einer gewissen Grenze zunimmt; so war sie z. B. bei Magnesiumoxyd bei einer Dicke von 0,26 mm unter sonst gleichen Umständen etwa doppelt so gross als bei einer Dicke von nur 0,05 mm.

Auf eine andere Anschauung stützte Bouguer<sup>2)</sup> eine ausgebildete Theorie der Lichtzerstreuung. Er dachte sich die matte Körperoberfläche durch eine grosse Anzahl kleiner ebener spiegelnder Flächenelemente gebildet, die nach allen Richtungen gelagert sind. Die Gesamtgrösse dieser Flächen von einer gewissen Richtung ist am grössten in der Richtung der Gesamtoberfläche und nimmt ab bei zunehmendem Winkel gegen dieselbe, sodass eine vorherrschende Spiegelung in dem Sinne der Wirkung der Gesamtoberfläche eintritt. Um die Grösse der Flächenelemente in den verschiedenen Richtungen zu bestimmen, hat Bouguer für verschiedene Körper die Hellig-

1) A. a. O. p. 278. Vgl. auch Quineke, über die optischen Eigenschaften der Metalle. Pogg. Ann. d. Ph. u. Ch. 29. p. 368. 1863.

2) Traité d'optique, p. 161 ff.

keiten gemessen, welche bei (nahezu) übereinstimmender Bestrahlungs- und Sehrichtung ( $\nu = 0^\circ$ ,  $\varepsilon = \alpha$ ) stattfindet. Indem dann, entsprechend seiner Annahme, nur die auf dieser Richtung senkrechten Flächenelemente, und zwar stets unter demselben Ein- und Ausfallswinkel von  $0^\circ$  zur Wirkung kommen, ist mit der hervorgebrachten Helligkeit  $H$  die Gesamtgrösse der so gelagerten Flächenelemente proportional, und zwar derjenigen, welche in einem so grossen Theile der Gesamtfläche enthalten sind, dass er eine gewisse unveränderliche Bildgrösse auf der Netzhaut erzeugt. Soll diese gewisse, aber willkürliche Bildgrösse durch die an der Stelle des betrachteten Flächenelementes befindliche, auf dem Sehstrahle senkrechte Flächeneinheit hervorgebracht werden, so wird sie durch den Theil  $1 : \cos \varepsilon$  der betrachteten Fläche hervorgebracht, da der Sehstrahl mit ihr den Winkel  $\alpha = \varepsilon$  bildet. Auf die Flächeneinheit der betrachteten Fläche geht demnach eine mit  $H : (1 : \cos \varepsilon) = H \cos \varepsilon$  proportionale Menge jener auf dem Sehstrahle senkrechten Elemente. Diese Grössen  $H \cos \varepsilon$  dienen daher als Maass der Gesamtgrösse der auf der Flächeneinheit der betrachteten Fläche befindlichen Elemente von einer gewissen Stellung, die unter dem Winkel  $\varepsilon$  gegen die Gesamtfläche geneigt ist. Bouguer trägt nun diese Grössen in der Einfallsebene auf den Linien der zurückgeworfenen Strahlen auf und erhält dadurch eine Curve, welche er die Zählcurve der Rauigkeiten (*numératrice des aspérités*) nennt. Dieselbe hat eine angenähert elliptische Gestalt, mit der Flächennormale als grossen Axe. Mittels dieser Curve löst er rein geometrisch eine Anzahl von Aufgaben, wie z. B. eine solche über die Sehrichtung der grössten Helligkeit bei einem gegebenen einfallenden Strahle, und geht dabei von der Annahme aus, dass bei gegebenem einfallendem und ausfallendem Strahle nur die auf der Halbirungslinie des Winkels dieser beiden Strahlen senkrechten Flächenelemente (spiegelnd) wirken, dass also der einfallende und der ausfallende Strahl ohne Aenderung der Helligkeit vertauscht werden dürfen. Dass bei glatten und matten Körperoberflächen diese Vertauschbarkeit in Wirklichkeit nicht besteht, wie vorhin mitgetheilt wurde, zeigt, dass für sie die Theorie der einfachen Spiegelung nicht genügt, wie auch die des Eindringens der Strahlen nicht ge-

nügte. Da aber solche Flächen bei grösseren Einfallswinkeln eine deutliche Spiegelung zeigen, so müssen spiegelnde Flächenelemente vorhanden sein. Die angeführte Beobachtung, wonach die Helligkeit grösser ist bei kleinem Einfalls- und grossem Ausfallswinkel, als im umgekehrten Falle, erklärt sich aber leicht durch gegenseitige Beeinflussung der Rauigkeiten, insbesondere dadurch, dass im ersten Falle, also bei steilerem Auftreffen, die Strahlen in die Vertiefungen der Rauigkeiten eindringen und durch mehrfache Zurückwerfung nach allen Richtungen zerstreut werden, dass dagegen im zweiten Falle die Vertiefungen zum Theil im Schatten liegen. Indem ferner Bouguer die Menge des zurückgeworfenen Lichtes nur von der Richtung der Halbirungslinie des Winkels des ein- und des ausfallenden Strahles, nicht aber von der Grösse dieses Winkels abhängig sein lässt, vernachlässigt er die Thatsache, dass bei grossem Einfallswinkel die Spiegelung viel stärker ist, als bei kleinem, obgleich er sie an anderer Stelle bei reinen Spiegeln messend nachweist. Seine beschränkten Versuche bei matten Flächen führten ihn nicht auf die Widersprüche seiner Theorie mit der Wirklichkeit, da er nur bei ineinanderliegenden ein- und ausfallendem Strahle beobachtete.

Wir kommen also zu dem Ergebnisse, dass bei matten Körperoberflächen sowohl ein Eindringen der Lichtstrahlen, als eine zerstreuende Spiegelung an kleinen Flächenelementen stattfindet. Diese Umstände sind aber bei dem wechselnden Grade der Rauigkeit und bei den wechselnden Gestalten der Erhöhungen so mannigfach, dass in jedem einzelnen Falle nur Beobachtungen Aufschluss über die Verhältnisse liefern.<sup>1)</sup>

So mögen in Folgendem die Beobachtungen mitgetheilt werden, welche ich im Jahre 1883 unter Beihülfe meines Sohnes Otto an gegossenem Gyps ausgeführt habe, sowie die Helligkeitsflächen, welche sich aus diesen Beobachtungen ergaben.<sup>2)</sup>

1) Das aus Suspension niedergeschlagene Magnesiumoxyd dient als Hauptbeispiel für Körper mit vollkommen matten Oberflächen, welche am besten den Lambert'schen Gesetze folgen, gegossener Gyps als Beispiel für theilweise spiegelnde Körper. Es ist dies begreiflich, da Magnesiumoxyd amorph, Gyps krystallinisch, d. i. aus lauter kleinen Kryställchen gebildet ist.

2) Ich habe hier noch zwei Arbeiten anzuführen, auf welche ich erst nach der ersten Veröffentlichung dieser Abhandlung aufmerksam ge-

## Die Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps.

Ich liess mir zwei gleiche quadratische Platten aus feinstem weissem Gyps von 25 cm Seite giessen, und beleuchtete sie im sonst dunklen Zimmer mit je einer Stearinkerze von 6 auf das Pfund, deren Flammen ich durch Biegen des Dochtes in das Innere der Flamme vergrössern konnte, und die ich auf möglichst gleichen Flammenhöhen hielt. Als Einheit der Helligkeit nahm ich die Helligkeit an, unter welcher eine solche Gypsplatte erschien bei senkrechter Beleuchtung durch ein Licht im Abstände von 1 Meter und bei senkrechtem Beschauen ( $\epsilon = \alpha = 0^\circ$ ). Die Bestrahlungs- und Sehrichtung konnten in Wirklichkeit nicht ganz zusammenfallen; aber da die Helligkeit bei kleinen Abweichungen des Einfalls- und Ausfallswinkels  $\epsilon$  und  $\alpha$  von  $0^\circ$  sich nur wenig ändert, konnten beide Winkel gleich und als  $0^\circ$  angenommen werden. Der Abstand des beschauenden Auges von der Platte ist ohne Einfluss auf die Helligkeit. Das Licht wurde durch einen Schirm vom Auge abgeblendet. Aenderte man den Abstand des Lichtes von der einen Gypsplatte, die wir als die erste (I) bezeichnen wollen, von 1 m zu  $a$  m, so wurde, stets bei  $\epsilon = \alpha = 0^\circ$ , die Helligkeit  $= 1 : a^2$ , und diese diente als Maass der Helligkeit für die zweite Gypsplatte (II). Diese wurde so aufgestellt, dass ihr Rand und derjenige von I sich für das

---

macht wurde. 1) Seeliger, zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Cl. d. k. bayr. Ak. d. Wiss. p. 201. 1888). Hr. Seeliger hat Messungen an verschiedenen Stoffen, Lehm, Milchglas, Sandstein, Schiefer, Gyps, Porzellan ausgeführt, und zwar bei den Azimuthen von  $0$  und  $180^\circ$ , und fand, übereinstimmend mit den obigen Beobachtungen, dass das Lambert'sche Gesetz, namentlich bei grossen Ein- und Ausfallswinkeln, nicht gilt, dass bei grossen solchen gegenüberliegenden Winkeln meist eine merkliche Spiegelung eintritt, und dass weder die Theorie des Eindringens des Lichtes, noch die der Spiegelung für sich allein die Erscheinungen erklärt. 2) Messerschmidt, über diffuse Reflexion. (Wied. Ann. d. Phys. u. Chem. **34**. p. 867. 1888.) Hr. Messerschmidt mass ebenfalls an verschiedenen Substanzen, bei Azimuthen von meist  $0$  und  $180^\circ$ , und kam zu Ergebnissen, welche mit denen von Hrn. Seeliger und von mir übereinstimmen. — Indem ich nun alle Azimuthe berücksichtigte, und denselben Stoff eingehend untersuchte, konnte ich die bis jetzt nicht ermittelten Helligkeitsflächen in ihren vollen und mannigfaltigen Gestaltungen erhalten.



Auge deckten, und dass sie vom Auge unter dem Ausfallswinkel  $\alpha$  betrachtet wurde; sie wurde dann von einem zweiten Lichte im Abstände von  $b$  m unter dem Einfallswinkel  $\epsilon$  beleuchtet, derart, dass das Azimuth (der Winkel der Ein- und der Ausfallebene)  $\nu$  war. Die beiden Lichter wurden durch Schirme so abgeblendet, dass jedes nur eine der Platten beleuchtete und dass keines das Auge bestrahlte. Dann wurde die Platte I so lange verschoben, bis die beiden Platten an ihren scheinbar zusammenfallenden Grenzen gleich hell erschienen, also ihre Bilder verschmolzen, und es wurde die Beurtheilung erleichtert durch eine vor das Auge gehaltene Blende mit einer Oeffnung, durch welche man nur kleinere, nahezu gleich gross erscheinende Theile beider Plattenerblickte. Indem man dann den Abstand der Platte I von dem Lichte mass und  $= a$  fand, war die Helligkeit beider Platten  $= 1 : a^2$ , und die Helligkeit  $H$  der II würde bei einem Lichtabstände  $= 1$  m

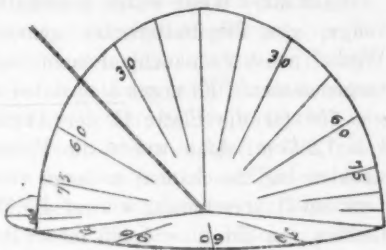


Fig. 1.

gleich  $H = b^2 : a^2$  sein. Dies ist aber die gewünschte Grösse, nämlich die Helligkeit, in welcher die Platte II bei dem Einfallswinkel  $\epsilon$ , dem Ausfallswinkel  $\alpha$  und dem Azimuth  $\nu$ , beleuchtet durch ein Licht im Abstände von 1 m, erscheint.

Um diese letzteren drei Winkel zu messen, oder vielmehr bestimmte Grössen derselben herzustellen, schnitt ich aus Carton eine Kreisscheibe von etwa 18 cm Halbmesser aus, schnitt dieselbe nach der einen Hälfte eines Durchmessers ganz, nach der anderen halb durch, und ebenfalls halb nach einem auf jenem Durchmesser senkrechten Halbmesser, sodass man durch Umbiegen eine körperliche Ecke herstellen konnte (Fig. 1), von welcher zwei Seiten und zwei Winkel rechte waren, die dritte Seite und der dritte Winkel aber, die einander gleich waren, sich von 0 bis 180° verändern konnten. Indem ich nun diese veränderliche Seite auf die Gypsplatte auflegte, bildete die nicht in ihr liegende Kante die Flächennormale,



die durch sie begrenzten rechtwinkligen Seiten wurden als Ein- und Ausfallsebene benutzt, und die dritte veränderliche Seite gab ihr Azimuth an. Indem die Azimuthwinkel von  $30^\circ$  zu  $30^\circ$ , die Ein- und Ausfallswinkel von  $15^\circ$  zu  $15^\circ$  getheilt waren und ausserdem  $82\frac{1}{2}^\circ$  und  $86\frac{1}{4}^\circ$  anzeigten, und indem eine im Scheitel befestigte Schnur in jenen Ebenen nach dem Auge und nach dem Lichte geführt wurde, gab sie den Aus- und den Einfallswinkel, der Grundhalbkreis aber das Azimuth an. Der bewegliche rechte Winkel wurde zeitweilig durch angeklebte Papierstreifen auf ein bestimmtes Azimuth fest eingestellt, für welches dann nacheinander alle Messungen vorgenommen wurden.

Auf diese Weise wurde innerhalb der angegebenen Werthe von  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  die Helligkeiten gemessen, dabei für dieselben Winkel meist 2, manchmal mehr, selten nur eine Einstellung vorgenommen. Es ergab sich dabei z. B. bei  $\nu = 30^\circ$ ,  $\varepsilon = 30^\circ$ ,  $\alpha = 75^\circ$  für die Platte II der Abstand des Lichtes von ihr  $b = 1,225$  m; dann wurde die Platte I (bei senkrechtem Bestrahlen und Beschauen) so lange verschoben, bis ihr Bild mit dem von II verschmolz, worauf die Messung den Abstand ihres Lichtes von ihr  $a = 1,465$  m ergab. Die Helligkeit von II wäre dann bei dem Lichtabstande  $= 1$  m selbst  $H = (1,225:1,465)^2 = 0,701$  gewesen. Eine zweite Einstellung lieferte  $a = 1,225$  m,  $b = 1,405$  m, daher  $H = 0,762$ .

Um ein Maass für die erlangte *Genauigkeit* zu erhalten, stellte ich die zwei Gypsplatten nebeneinander, und setzte sie an der Grenzkante der senkrechten Beleuchtung durch dasselbe Licht aus. Ich liess nun die eine verschieben, bis die Bilder beider verschmolzen, mass die Abstände der beweglichen und fand dieselben schwankend zwischen den äussersten Grenzen  $0,746$  und  $0,774$  m, ihre Helligkeit also zwischen  $(1:0,746)^2$  und  $(1:0,774)^2$ , d. h. zwischen  $1,797$  und  $1,666$ , also um  $0,131$ . Die verhältnissmässig grösste Schwankung war daher  $0,131:1,738 = 0,075$ , wobei  $1,738$  die mittlere Helligkeit war; die grösste Abweichung vom Mittel war aber  $0,072$  und die verhältnissmässige  $= 0,072:1,738 = 0,0406$ . Der mittlere verhältnissmässige Fehler ergab sich  $= 0,0196$ . Grösser war die Unsicherheit bei Anwendung von zwei Lichtern, deren Verschiedenheit dann mitwirkte; die Abweichung zweier Messungen voneinander

konnte dann bis auf 0,1 der Helligkeit steigen, in ganz seltenen Fällen bis auf 0,15. Im Mittel betrug die verhältnissmässige Abweichung zweier Messungen voneinander 0,06, daher die Abweichung vom Mittel 0,03. Wenn demgegenüber schon Helligkeitsunterschiede von 0,01 und kleiner beobachtet werden konnten, nämlich bei einem schwachgrauen Ringe auf weissem Grunde, der auf einer sich rasch drehenden weissen Scheibe durch einen schwarzen Strich hervorgebracht wurde, so ist zu beachten, dass hierbei nur eine Lichtquelle zur Wirkung kommt, und dass für eine solche Figur eines beiderseits in Weiss eingeschlossenen Ringes das Auge besonders empfindlich ist.

Bei den angegebenen nicht grossen Genauigkeiten der Messung musste die *Ausgleichung* um so sorgfältiger vorgenommen werden. Dies geschah nach dem Gesetze der Stetigkeit in geometrischer Weise. Man kann nämlich nach dem Vorgange Bouguer's Helligkeitsflächen bilden und zwar in verschiedener Weise. Trägt man für einen bestimmten einfallenden Strahl, also bei unveränderlichem  $\epsilon$ , auf jedem von demselben Punkte  $F$  der Fläche ausgehenden ausfallenden Strahle die Helligkeit  $H$  auf, unter welcher die Fläche in ihm erscheint, so bilden die Endpunkte dieser Strecken  $H$  eine Fläche, die *Helligkeitsfläche*. Nach dem Lambert'schen Gesetze wäre diese Helligkeit unveränderlich  $= \cos \epsilon$ , also die Helligkeitsfläche eine Halbkugel von diesem Halbmesser. Trägt man dagegen auf jenen Strahlen die von demselben Flächenelemente, das wir als Flächeneinheit annehmen, ausgestrahlten Lichtmengen auf, welche  $= H \cos \alpha$  sind, so würde man eine andere Fläche, die der *ausgestrahlten Lichtmengen* erhalten, und diese wäre nach dem Lambert'schen Gesetze wieder eine Kugel, welche aber die Fläche in  $F$  berührte und den Halbmesser jener Helligkeitshalbkugel zum Durchmesser hätte. Endlich kann man von  $F$  aus einen festen ausfallenden Strahl ziehen, dem also ein unveränderliches  $\alpha$  zukommt, und auf jeden nach  $F$  gezogenen einfallenden Strahle bei unveränderlicher Stärke desselben, die Helligkeit auftragen, unter welcher durch seine Wirkung in jener festen Richtung die Fläche erscheint. Man könnte diese die *Beleuchtungsfläche* nennen, weil sie für jede Beleuchtungsrichtung die Helligkeit für eine gewisse Seh-

richtung angibt. Sie unterscheidet sich von der Helligkeitsfläche dadurch, dass sie die beleuchtete Platte in  $F$  berührt, während die Helligkeitsfläche sie nach einer ausgedehnten Curve schneidet, weil für streifende Lichtstrahlen die Helligkeit Null wird, für streifende Sehstrahlen aber endlich bleibt. Nach dem Lambert'schen Gesetze wäre auf jedem einfallenden Strahle die Helligkeit  $\cos \epsilon$  aufzutragen, die Fläche würde also eine berührende Kugel vom Durchmesser Eins sein; sie wäre unabhängig von  $\alpha$ , oder für jede Lage des ausfallenden Strahles dieselbe. Wollte man endlich noch bei festem ausfallendem Strahle auf jedem einfallenden Strahle die von dem unveränderlichen Flächenelemente ausgestrahlte Lichtmenge auftragen, so müsste man die vorher gefundenen Helligkeiten noch mit  $\cos \alpha$  multipliciren. Nach dem Lambert'schen Gesetze erhielte man dann eine berührende Kugel vom Durchmesser  $\cos \alpha$ . Wir werden in der Folge nur die Helligkeiten, nicht aber die von der Flächeneinheit ausgestrahlten Lichtmengen ins Auge fassen, sodass nur die Helligkeits- und die Beleuchtungsflächen in Betracht kommen.

Diese Flächen sind nun stetige, und mittels ihrer *Stetigkeit* kann man die mit den Beobachtungsfehlern behafteten Messungsergebnisse verbessern. Bei den Helligkeitsflächen ist  $\epsilon$  unveränderlich; und legt man eine schneidende Ebene durch die Flächennormale, so erhält man eine Schnittcurve, für deren beide Hälften die Azimuthe  $\nu$  und  $180^\circ - \nu$  mit übereinstimmendem, unveränderlichem  $\nu$  gelten, in welcher sich  $H$  nur mit  $\alpha$  ändert. Eine solche Curve soll Meridiancurve heissen. Legt man dagegen einen schneidenden Umdrehungskegel mit  $F$  als Spitze und der Flächennormale als Umdrehungsaxe, also mit unveränderlichem  $\alpha$ , so ändert sich  $H$  mit  $\nu$ . Diese Curve heisse die Kegelcurve. Entsprechend liefert die Beleuchtungsfläche Meridian- und Kegelcurven.

Da  $H$  von den 3 unabhängig Veränderlichen  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  abhängt, so erhält man jene Curven, indem man zwei dieser letzteren Grössen unveränderlich lässt; dann ist  $H$  nur noch von der letzten der drei abhängig. Da  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  Winkel,  $H$  ein Strahl, so ist jede der Curven durch Polarkoordinaten gegeben. Trägt man auf den Strahlen die durch Messung erhaltenen  $H$  auf, so wird die durch deren zweite Endpunkte gelegte Curve

wegen der Messungsfehler nicht stetig sein, und es muss dann eine sich den Beobachtungspunkten möglichst anschliessende stetige Curve gezeichnet werden. Nun erhält man aber dreierlei Curven:

- 1) wenn  $\varepsilon, \nu$  unveränderlich, die Meridiancurve  $\alpha H$ ,
- 2) wenn  $\alpha, \nu$  unveränderlich, die Meridiancurve  $\varepsilon H$ ,
- 3) wenn  $\varepsilon, \alpha$  unveränderlich, die Kegelcurve  $\nu H$ .

Die letztere Curve befindet sich auf einem Umdrehungskegel und nimmt zweierlei Gestalten an, indem entweder das unveränderliche  $\varepsilon$  einen festen einfallenden Strahl bezeichnet, daher die Curve auf dem Kegel  $\alpha \nu$  liegt, oder indem  $\alpha$  einen festen ausfallenden Strahl bezeichnet, und daher die Curve auf dem Kegel  $\varepsilon \nu$  liegt.

Die bestimmenden Elemente  $\nu, H$  sind aber beidesmal dieselben. Man erhält daher wesentlich doch nur dreierlei Curven, die beiden Meridiancurven  $\alpha H$  und  $\varepsilon H$ , und die Kegelcurve  $\nu H$ . Wenn man eine dieser Curven, z. B. die einem bestimmten  $\varepsilon$

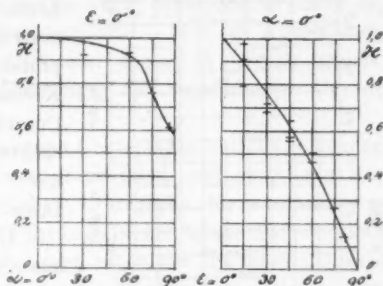


Fig. 2.

die einem bestimmten  $\varepsilon$  und  $\nu$  zugehörige  $\alpha H$  stetig an die Beobachtungspunkte angeschmiegt hat, so ist für jeden Strahl dieser Curve ein System von 4 zusammengehörigen Werthen  $\varepsilon, \alpha, \nu, H$  festgesetzt. Die Curven  $\varepsilon H$  und  $\nu H$  enthalten aber den Werth von  $H$  für denselben Strahl, und müssen für ihn denselben Werth von  $H$  liefern. Dadurch entsteht die schwierige Aufgabe, drei Gruppen von Curven  $\alpha H, \varepsilon H, \nu H$  zu zeichnen, welche sich den Beobachtungspunkten möglichst anschliessen, stetig sind, und in denen die drei zu denselben  $\alpha, \varepsilon, \nu$  gehörigen  $H$  dieselben sind. Die Anzahl der Curven hängt von den gewählten Intervallen ab. Für die Messung wählte ich meist solche von  $30^\circ$ , für die Zeichnung meist  $15^\circ$ ; bei der Messung nahm ich für  $\varepsilon$  und  $\alpha$  die Winkel  $0, 30, 60, 75, 82\frac{1}{2}, 86\frac{1}{4}, 90^\circ$  — wobei der letztere Winkel als Grenzwinkel galt, welcher nur durch stetige Verlängerung

erreicht wurde —, für  $\nu$  die Winkel 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180°. Ich verzeichnete 41 solcher Curven mit ihren Polar-coordinaten, also wirkliche Meridiancurven, und die Kegel-

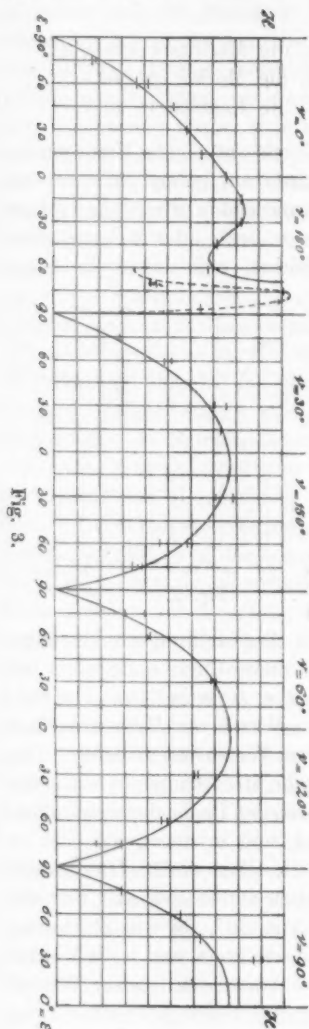


Fig. 3.

curven in der Abwicklung der Kegel. Ich fand aber, dass dabei die Empfindlichkeit des Blickes für Stetigkeit nicht so gross war, als zu wünschen, und ging daher zu rechtwinkligen Coordinaten über. Ein unveränderliches  $H$  liefert bei Polar-coordinaten einen Kreis, bei rechtwinkligen eine gerade Linie. Die Abweichungen von einer Geraden können feiner empfunden werden, als die von einem Kreise, und auch bei anderen Curven die Stetigkeit mittels rechtwinkliger Coordinaten feiner, als mittels Polarcoordinaten.

Um eine Vorstellung der letzteren Curven zu geben, habe ich neben einige abgebildet. Fig. 2 gibt die beiden wichtigsten, die für  $\varepsilon = 0^\circ$ , also für den normal einfallenden Strahl, für welchen die Helligkeitsfläche eine Umdrehungsfläche, daher  $\nu$  ohne Einfluss ist, und die für  $\alpha = 0^\circ$ , also für den normal ausfallenden Strahl, für welchen die Beleuchtungsfläche ebenfalls eine Umdrehungsfläche und  $\nu$  ohne Einfluss ist. Fig. 3 gibt die Reihe der Curven  $\varepsilon H$  für  $\alpha = 75^\circ$  und für  $\nu$  der Reihe nach  $= 0$  und  $180, 30$  und  $150, 60$  und  $120, 90^\circ$ . Die

Ordinaten  $H$  sind für die angegebenen Werthe der  $\varepsilon$  verzeichnet, und es sind die gemessenen Werthe von  $H$  durch kleine Querstriche angedeutet. Man erhält dadurch eine Vorstellung von dem Grade der Genauigkeit. Dabei zeigt sich, dass die Beobachtungen für  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\nu = 90^\circ$ ,  $\varepsilon = 30^\circ$  stark von der verzeichneten Curve abweichen, sodass diese Beobachtung unbrauchbar wird; vielleicht waren hierbei die Lichter zu sehr ungleich geworden. Bei  $\nu = 180^\circ$  tritt die hervorragende Wirkung der Spiegelung hervor; die Curve konnte an dieser Stelle theilweise nur mit halben Ordinaten angegeben werden. Solcher Reihen wurden 23 verzeichnet. Auch diese Curven mussten, wie die für die Polarcoordinaten, so gezogen werden, dass sie sich den Beobachtungspunkten möglichst anschlossen, dass sie stetig waren und dass jede Ordinate  $H$ , die in jeder der 3 Gruppen vorkommt, also im Allgemeinen und wenigstens dreimal, jedesmal denselben Werth erhielt. Dadurch wird auch der Uebergang der benachbarten Curven ineinander stetig.

Nach diesen ausgeglichenen Curven sind nun die folgenden Tabellen für die Werthe von  $H$  gebildet, und zwar jede einzelne für ein unveränderliches  $\varepsilon$ , dagegen für wechselnde  $\alpha$  und  $\nu$ , welche Winkel die Eingänge bilden. Jede Tabelle dient also unmittelbar zur Construction einer der Helligkeitsflächen. Die Werthe von  $\cos \varepsilon$ , welche die Werthe von  $H$  nach dem Lambert'schen Gesetze bilden, sind beigelegt, so dass man die Abweichung von diesem Gesetze unmittelbar erkennen kann. Es ist noch die Tabelle für  $\varepsilon = 54^\circ 44'$  zugefügt, weil dies der Einfallswinkel gegen die Grundriss- und die Aufrissebene der technischen Zeichnungen ist, wenn man, wie hier gebräuchlich, die Projectionen des Lichtstrahls unter  $45^\circ$  gegen die Projectiionsaxe geneigt annimmt.

Tabelle der Helligkeiten  $H$  für die Einfallswinkel  $\varepsilon$ , die Ausfallswinkel  $\alpha$  und die Azimuthe  $\nu$ .

$\alpha$	0°	15	30	45	60	75	82½	86½	90
$\varepsilon = 0^\circ$	1,00	0,99	98	96	93	76	65	62	59

$\varepsilon = 15^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,97$								$\varepsilon = 30^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,87$							
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180	$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,90	90	90	90	90	90	90	$0^\circ$	0,76	76	76	76	76	76	76
15	91	91	91	91	91	91	91	15	77	77	77	77	77	77	76
30	93	93	93	93	93	93	93	30	80	80	79	79	79	79	78
45	94	93	92	92	92	93	94	45	82	82	81	80	81	83	
60	91	90	88	89	90	91	92	60	78	78	78	78	79	86	
75	68	74	75	76	76	77	83	75	60	68	71	72	72	74	
$82\frac{1}{2}$	62	63	63	63	63	65	68	$82\frac{1}{2}$	53	61	64	64	65	67	
$86\frac{1}{4}$	59	60	61	61	61	62	64	$86\frac{1}{4}$	50	57	61	62	62	64	
90	56	57	58	59	59	60	60	90	48	53	58	58	58	60	

$\varepsilon = 45^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,71$								$\varepsilon = 54^\circ 44' \quad \cos \varepsilon = 0,58$							
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180	$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,62	62	62	62	62	62	62	$0^\circ$	0,52	52	52	52	52	52	52
15	62	62	62	62	62	61	60	15	51	51	51	51	50	50	
30	63	63	63	63	62	62	62	30	51	51	51	50	50	49	
45	63	63	63	63	63	66	87	45	50	51	52	52	52	54	
60	60	63	64	65	66	74	94	60	48	51	54	54	55	62	
75	50	58	62	63	64	67	72	75	42	48	53	54	56	61	
$82\frac{1}{2}$	44	53	59	60	61	65	69	$82\frac{1}{2}$	37	45	52	53	56	61	
$86\frac{1}{4}$	42	49	57	58	59	64	68	$86\frac{1}{4}$	34	42	51	52	55	61	
90	40	46	55	56	58	62	67	90	32	38	50	51	55	61	

$\varepsilon = 60^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,50$								$\varepsilon = 75^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,26$							
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180	$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,47	47	47	47	47	47	47	$0^\circ$	0,24	24	24	24	24	24	24
15	46	46	46	46	45	44	43	15	23	23	23	23	23	23	
30	45	45	45	44	43	43	42	30	22	22	22	22	22	21	
45	43	44	46	46	46	48	52	45	21	22	22	22	23	24	
60	41	45	48	48	49	55	98	60	21	24	25	25	26	30	
75	37	43	48	49	52	58	70	75	22	24	28	28	31	38	
$82\frac{1}{2}$	33	40	48	49	53	59	65	$82\frac{1}{2}$	21	24	28	29	33	43	
$86\frac{1}{4}$	32	37	47	49	53	60	64	$86\frac{1}{4}$	19	23	30	31	35	45	
90	28	35	47	48	53	60	63	90	16	22	30	32	36	47	

$\varepsilon = 82\frac{1}{2}^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,13$								$\varepsilon = 86\frac{1}{4}^\circ \quad \cos \varepsilon = 0,07$							
$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180	$\alpha$	$\nu=0^\circ$	30	60	90	120	150	180
$0^\circ$	0,13	13	13	13	13	13	13	$0^\circ$	0,07	07	07	07	07	07	07
15	13	13	13	13	13	13	13	15	07	07	07	07	07	07	
30	12	12	12	12	11	11	11	30	06	06	06	06	06	06	
45	11	11	11	11	12	12	12	45	05	05	05	05	05	05	
60	10	12	13	13	14	16	22	60	05	06	07	07	07	08	
75	12	12	15	16	16	25	1,90	75	06	07	08	09	10	12	
$82\frac{1}{2}$	11	12	16	17	18	29	5,00	$82\frac{1}{2}$	06	07	09	09	10	15	
$86\frac{1}{4}$	10	12	17	18	20	32	5,21	$86\frac{1}{4}$	05	06	09	09	11	16	
90	08	11	17	18	22	35	2,60	90	04	06	09	09	11	18	

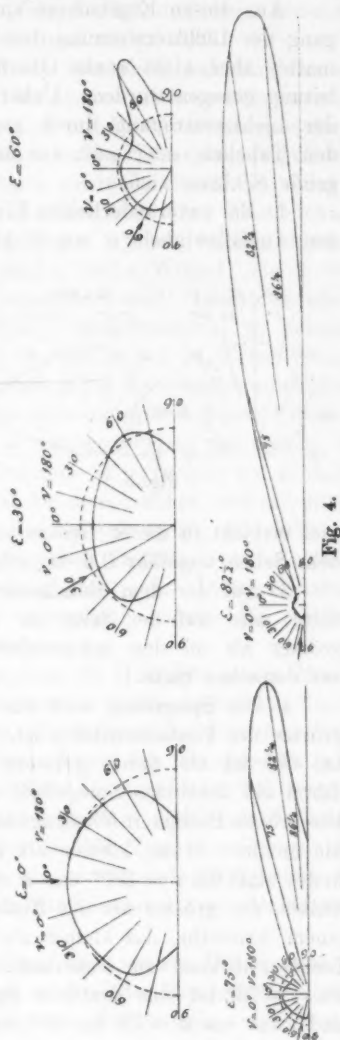
In Fig. 4 sind von den Helligkeitsflächen die Meridiane der Einfallsebenen, also für  $\nu = 0$  und  $= 180^\circ$  angegeben, und zwar für  $\varepsilon = 0, 30, 60, 75, 82\frac{1}{2}^\circ$ ; die gestrichelten Halb-



kreise sind mit den Halbmessern  $\cos \varepsilon$  verzeichnet, gehören also den Helligkeitsflächen an, welche dem Lambert'schen Gesetze entsprechen und Halbkugeln sind.

Die Tabellen für die Beleuchtungsflächen, also mit unveränderlichem  $\alpha$ , bildet man aus den vorigen. In Fig. 5 sind die Meridiane der Ausfallsebenen für diese Flächen für  $\alpha = 0$  und  $= 60^\circ$  verzeichnet; die gestrichelten Kreise gehören den Beleuchtungsflächen nach Lambert an, welche gleiche von  $\alpha$  unabhängige Vollkugeln vom Halbmesser 1 bilden.

Die beigelegte Tafel gibt die photographischen Nachbildungen der Modelle von vier Helligkeitsflächen für  $\varepsilon = 0, 30, 60, 82\frac{1}{2}^\circ$ , welche mein Assistent, Hr. C. Tesch, ausgeführt hat. Es wurden die Meridiane in den angegebenen Intervallen von  $30^\circ$  ausgeschnitten und durch Kegel verbunden, welche bei den drei ersten Modellen mit  $\alpha = 30$  und  $60^\circ$ , bei dem letzten mit  $\alpha = 82\frac{1}{2}^\circ$  gebildet sind. Auf Meridianen und Kegeln sind auch die kreisförmigen Schnitte mit den Helligkeitskugeln Lambert's (von den Halbmessern  $\cos \varepsilon$ ) aufgezeichnet. Zur leichten Unterscheidung sind die Meridian- und Kegelcurven der wirklichen Helligkeitsflächen nach innen



weiss gelassen, die der Lambert'schen nach innen schwarz angelegt. Der einfallende Lichtstrahl ist durch einen Draht mit Pfeilspitze bezeichnet.

Aus diesen Ergebnissen sind Folgerungen über den Vorgang der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps und durch matte, aber nicht raue Oberflächen überhaupt in der Einleitung gezogen worden. Ueber die erfahrungsmässige Stärke der Lichtzerstreuung durch gegossenen Gyps kann man aus den Tabellen, oder auch aus den Figuren und Modellen, folgende Schlüsse ziehen.

1. Bei unveränderlichem Einfallswinkel  $\varepsilon$  und bei wechselnden Ausfallswinkeln  $\alpha$  von  $0$  bis  $60^\circ$  ist die Helligkeit eine ziemlich gleichförmige und zwar meist etwas kleiner, als nach dem Lambert'schen Gesetze.

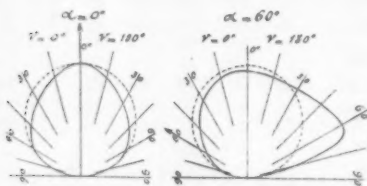


Fig. 5.

2. Nimmt dann  $\alpha$  weiter von  $60$  bis  $90^\circ$  zu, so nimmt die Helligkeit im allgemeinen ab,

und erreicht in dieser Grenze von  $\alpha = 90^\circ$  oder bei streifen- dem Sehen ungefähr  $0,6$  derjenigen bei  $\alpha = 0^\circ$ .

3. Auf der dem einfallenden Strahle gegenüberliegenden Seite, also auf der Seite der Spiegelung ist die Helligkeit grösser als an den entsprechenden Stellen (von gleichem  $\alpha$ ) auf derselben Seite.

4. Die Spiegelung wird um so deutlicher und stärker, je grösser der Einfallswinkel  $\varepsilon$  ist. Bei  $\varepsilon = 45^\circ$  und noch mehr bei  $60^\circ$  ist sie durch grössere Helligkeit, noch nicht aber durch ein deutliches Spiegelbild oder durch Glanz bemerkbar. Die grösste Helligkeit  $H$  beträgt bei  $\varepsilon = 60^\circ$  schon  $1,03$ , während die mittlere etwas kleiner als  $\cos \varepsilon$  oder  $0,5$  ist, und dies findet statt bei  $\nu = 180^\circ$  und  $\alpha = 67^\circ$ , also bei einem Ausfallswinkel, der grösser als der Einfallswinkel ( $60^\circ$ ) ist. Auch bei einem Azimuthe, das kleiner als  $180^\circ$ , ist noch eine deutliche Lichtverstärkung zu bemerken, und zwar bis zu  $\nu = 162^\circ$ . Bei  $\varepsilon = 75^\circ$  ist eine deutliche Spiegelung mit Glanz sichtbar, und zwar von  $\alpha = 73$  bis  $90^\circ$ , am stärksten mit  $H = 2,2$  bei

$\alpha = 79^\circ (> 75^\circ)$ , während  $\cos \varepsilon = 0,26$ . Bei  $\varepsilon = 82\frac{1}{2}^\circ$  reicht die Spiegelung von  $\alpha = 73$  bis  $90^\circ$ , und ist am grössten mit  $H = 5,2$  bei  $\alpha = 85^\circ$ , während  $\cos \varepsilon = 0,13$ . Bei  $\varepsilon = 86\frac{1}{4}^\circ$  reicht die Spiegelung von  $\alpha = 78\frac{1}{2}$  bis  $90^\circ$ , und ist am grössten mit  $H = 14,4$  bei  $\alpha = 88^\circ$ , während  $\cos \varepsilon = 0,07$ .

Man bemerkt also, dass die Spiegelung am stärksten ist bei einem Ausfallswinkel  $\alpha$ , der immer etwas grösser als der Einfallswinkel  $\varepsilon$  ist. Nimmt man mit Bouguer an, was auch diese Beobachtungen bestätigen, dass die Fläche der spiegelnden Flächentheilchen um so grösser wird, je kleiner ihr Winkel mit der Gesamtoberfläche, so lässt sich jene Erscheinung, dass bei der stärksten Spiegelung  $\alpha > \varepsilon$  ist, leicht erklären. Bei merklicher Spiegelung sind  $\alpha$  und  $\varepsilon$  Winkel, die  $> 60^\circ$  und nicht sehr voneinander verschieden sind. Lässt man nun  $\varepsilon$  unverändert und  $\alpha$  etwas über  $\varepsilon$  hinauswachsen, so nehmen bei zunehmendem  $\alpha$  auch  $\alpha - \varepsilon$  und  $\alpha + \varepsilon$  zu. Der Winkel der spiegelnden Flächentheilchen gegen die Gesamtoberfläche ist aber  $\frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)$ , und die Gesamtgrösse dieser Flächentheilchen nimmt ab, wenn  $\alpha$  zunimmt, aber nur wenig, da  $(\alpha - \varepsilon)$  stets klein bleibt. Dagegen ist  $\frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)$  der Einfalls- und Ausfallswinkel gegen diese Flächentheilchen, und mit seiner Zunahme nimmt die Stärke der Spiegelung zu, und bekanntlich besonders rasch bei grösseren Einfalls- (und Ausfallswinkeln), wie sie hier vorausgesetzt sind. Diese Zunahme überwiegt daher stets jene Abnahme, sodass die stärkste Spiegelung bei  $\alpha > \varepsilon$  stattfindet.

In bezug auf die Nachahmung der Helligkeit in der *Malerei* ergibt sich daher, dass man ziemlich wahrheitsgemässe Ergebnisse erhält, wenn man im allgemeinen das Lambert'sche Gesetz gelten lässt, wenn man ferner bei sehr grossem Ausfallswinkel, besonders in der Nähe der streifenden Sehstrahlen, die Helligkeit auf 0,6 der nach Lambert erhaltenen Helligkeit verkleinert, andererseits aber in der Nähe der Spiegelungspunkte grössere, gegen ihn hin zunehmende Helligkeiten anwendet, die bei wachsendem Einfallswinkel  $\varepsilon$  in Glanzstellen übergehen.

Es wäre nun zu wünschen, dass weitere Untersuchungen an verschiedenen Stoffen mit wechselnder Beschaffenheit ihrer Oberfläche und auch mit feineren Hilfsmitteln, als sie dem

Verfasser zu Gebote standen, ausgeführt, und dass für sie alle die Helligkeitsflächen ermittelt würden. Für die Malerei wären solche Untersuchungen besonders über die Bekleidungsstoffe, Leinwand, Tuch, Seide, Sammt, von grossem Werthe, und weitergehend die Aufstellung von Farbenscalen, die darauf gegründet wären.

---

### VIII. *Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke, von Christian Wiener.*

---

Anschliessend an die in der vorhergehenden Abhandlung beschriebenen Beobachtungen über die Lichtzerstreuung habe ich solche über die *Stärke oder Grösse der Helligkeitsempfindung* angestellt, sowie über ihre Messung durch eine *Empfindungseinheit*.

Als ich diese Arbeiten ausführte, waren mir diejenigen Fechner's über diesen Gegenstand nicht bekannt; und als ich später diese tiefgehenden Untersuchungen kennen lernte, war es mir eine Genugthuung zu finden, dass meine Anschauungen mit den seinigen im wesentlichen übereinstimmten. Ein Unterschied besteht aber, der nämlich, dass Fechner<sup>1)</sup> das Messen der Empfindungsstärke durch den Zusammenhang dieser Stärke mit dem zugehörigen Reize möglich macht, wobei dieser Zusammenhang durch das Weber'sche Gesetz gegeben wird, während ich dieses Messen unabhängig von dem Zusammenhange mit dem zugehörigen Reize vermittels des Zählens der nach und nach aneinander zu fügenden eben merkbaren Empfindungsunterschiede ausführe. Meine Zählweise hat die Eigenthümlichkeit, die vielleicht im ersten Augenblicke als ein Mangel erscheint, dass die Empfindungsstärke, die durch denselben Reiz, z. B. durch eine in bestimmter Weise beleuchtete Gypsplatte bei verschiedenen Menschen, oder auch bei demselben Menschen in verschiedenen Zuständen desselben hervorgebracht wird, verschieden gross sind, oder dass die Maasszahl dieser Empfindungsstärke, d. i. die Anzahl ihrer Empfindungseinheiten, wechselt. Es ist dies aber in der Natur der Sache begründet, denn die Stärke der Empfindung hängt nicht nur von der Stärke des Reizes, sondern auch von der Empfindlichkeit des vom Reize getroffenen Menschen ab. Fechner stellt

1) Fechner, Elemente der Psychophysik. 1860. 2. unveränderte Aufl. 1889.

dagegen auf Grund des Weber'schen Gesetzes eine Formel zwischen den Stärken der Empfindung und des zugehörigen Reizes mit unbestimmten Constanten auf.<sup>1)</sup> Dadurch gewinnt er aber nicht den Begriff einer bestimmten Empfindungseinheit, derart dass ihn der Mangel dieser Einheit von Widersachern zum Vorwurf gemacht wird, so von Delbeauf, Kries, F. A. Müller, Zeller.<sup>2)</sup> Der Grad der Empfindlichkeit ist dadurch ausgeschieden; dies muss ich aber für einen Mangel halten, da dieser Grad wesentlich zum Messen der Empfindungsstärke gehört, und seine Ausscheidung daher als eine Verschleierung anzusehen ist.

Noch kurz vor seinem im November 1887 erfolgten Tode hat Fechner in einer Erwiderung auf Angriffe seine psychophysischen Ansichten in einer Weise dargestellt<sup>3)</sup>, die mir deutlicher erscheint, als seine früheren Darstellungen. Dabei gibt er auch den Begriff einer Empfindungseinheit an, der, weil er von der Empfindlichkeit unabhängig ist, ein absoluter sein muss. In Wahrheit ist aber stillschweigend eine ganz bestimmte Empfindlichkeit zugrunde gelegt. Wir werden diese absolute Empfindungseinheit, die jedoch für sich noch nicht ausreicht, später benutzen, um auch ein absolutes Maass für die Empfindungsstärke und für die Empfindlichkeit zu gewinnen.

Gehen wir nun zu unseren Untersuchungen über. Mit dem Wachsen der Helligkeit einer Fläche, das ist auch mit dem Wachsen des *Reizes*, den sie auf unser Auge ausübt, wird die Empfindung der Helligkeit stärker oder die Empfindungsgrösse oder Empfindungsstärke wächst. Aber die Helligkeitsempfindung nimmt nicht gleichförmig zu, wenn die Helligkeit gleichförmig zunimmt, oder allgemein, die Empfindungsstärke wächst nicht in dem gleichen Maasse wie der Reiz. Denn wenn eine Fläche mit einer und nachher mit zwei Kerzen beleuchtet wird, so wird die Helligkeit um diejenige vermehrt, welche eine Kerze hervorbringt, und zugleich wird die Helligkeits-

1) l. c. p. 12.

2) Vgl. Fechner, Revision der Hauptpunkte der Psychophysik. p. 300, 321, 324, 332. 1882.

3) Fechner, über die psychischen Maassprincipien und das Weber'sche Gesetz (Philosophische Studien, herausgegeben von Wundt. 4. p. 161 ff., insbes. 179—212). 1888.

empfindung bedeutend gesteigert. Wenn aber die Fläche zuerst mit 100, dann mit 101 Kerzen beleuchtet wird, so wird die Helligkeit wieder um die von einer Kerze hervorgebrachte vermehrt, aber die Helligkeitsempfindung wird nicht merklich gesteigert. Oder allgemeiner: wenn in zwei Fällen der Reiz um gleichviel vermehrt wird, wird nicht zugleich die Empfindungsstärke um gleichviel vermehrt.

Hier drängt sich uns als Maasseinheit der Zunahme der Empfindungsstärke und damit der Empfindungsstärke selbst die *Merkbarkeit* dieser Zunahme auf, sodass wir sagen, zwei Empfindungsstärken sind um eine *Empfindungseinheit* verschieden, wenn ihr Unterschied gerade bemerkt oder empfunden werden kann. Wenn wir daher, im Falle der Empfindung der Helligkeit unsere Gypsplatte, diese in einem dunklen Raume mit schwarzen Wänden durch ein unserem Auge verdecktes, vielleicht recht schwaches Licht aus grosser Entfernung beleuchten, sie aber dennoch nicht erkennen können, und dann das Licht näher rücken, bis sich die Gypsplatte von ihrer dunklen Umgebung gerade bemerkbar abhebt, so ist die Empfindungsstärke von Null auf Eins gestiegen, besitzt also die Stärke der Empfindungseinheit. Hat man dabei zwei gleiche Platten nebeneinander gestellt, deren Bilder dann verschmelzen, und man nähert nachher die eine Platte dem Lichte, bis sie von der andern gerade als die hellere unterschieden werden kann, so ist die Empfindungsstärke wieder um eine Einheit gestiegen, also = 2 geworden. Dann nähert man die dunklere, bis sie gerade als hellere unterschieden werden kann, so erregt sie eine Empfindung von der Stärke 3 etc. Die Empfindungseinheit ist also gegeben durch die eben bemerkbare Unterscheidbarkeit zweier Empfindungen, und die Maasszahl einer Empfindungsstärke ist die Anzahl der schwächeren Empfindungsstärken, welche man zwischen der gegebenen und dem Mangel an jeder Empfindung mit eben noch bemerkbarer Unterscheidbarkeit einschalten kann, vermehrt um Eins. So würde die durch einen Stern hervorgebrachte Empfindungsstärke gleich der Anzahl von Sternen von eben noch unterscheidbarer Helligkeit sein, welche zwischen dem gegebenen Stern und dem dunklen Himmelsgrunde liegen, vermehrt um Eins. Diese Empfindungseinheit und daher auch die Maasszahl der durch denselben Reiz



hervorgebrachten Empfindungsstärke wird natürlich mit der Person, und auch bei derselben Person mit ihren verschiedenen Zuständen, z. B. mit dem Grade der Aufmerksamkeit und der Ermüdung wechseln.

Dabei steht jedenfalls die Zunahme der Empfindungsstärke mit derjenigen des Reizes in einem gesetzmässigen Zusammenhange; es ist aber bei jener Bestimmung der Empfindungsstärke gar nicht nothwendig, diesen Zusammenhang zu kennen; man kann stets durch Versuche die Grösse der Empfindung in der angegebenen Weise abzählend bestimmen. Jener Zusammenhang ist aber in Wirklichkeit ein sehr einfacher, und gegeben durch das *Weber'sche Gesetz*. Nach ihm ist innerhalb gewisser Grenzen der Unterschied zweier Empfindungen eben bemerkbar, wenn der Reiz sich um einen bestimmt verhältnissmässigen Theil seiner Grösse ändert.

Nimmt der Reiz  $r$  um  $\Delta r$  bis zu  $r_1$  zu, so hat  $\Delta r$  sowohl zu dem kleineren  $r$ , wie zu dem grösseren  $r_1 = r + \Delta r$  (und auch zu dem mittleren  $r + \frac{1}{2} \Delta r$ ) ein unveränderliches Verhältniss. Ist  $r : \Delta r = \alpha$ , so ist  $r_1 : \Delta r = (r + \Delta r) : \Delta r = \alpha + 1$ , oder es ist

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\Delta r}{r_1} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

So ist z. B. nach der zweiten Reihe der folgenden Versuche der Unterschied der Helligkeiten zweier Gypsplatten eben bemerkbar, wenn er etwa  $\frac{1}{12}$  der Helligkeit der weniger hellen, also  $\frac{1}{13}$  derjenigen der helleren beträgt, sodass hier  $\alpha = 12$  wäre.

Der Unterschied dieser beiden Verhältnisszahlen liegt aber immer innerhalb der Fehlergrenze. Wir wollen mit Fechner<sup>1)</sup> das Verhältniss  $(1 : \alpha)$  die *Verhältnisschwelle* (Verhältnissconstante) nennen.  $\alpha$  ist ihr reciproker Werth. Der Unterschied der zu den Reizen  $r$  und  $r_1$  gehörigen Empfindungen  $e$  und  $e_1$  ist eben bemerkbar, also die angenommene Empfindungseinheit.<sup>2)</sup>

1) Fechner, Elem. d. Psychophysik. 1. p. 244.

2) Die Hrn. König u. Brodhun fanden, dass das Weber'sche Gesetz für sehr grosse Helligkeiten nicht mehr gilt, indem bei diesen die unveränderliche Verhältnisschwelle zunimmt. (Experimentelle Untersuchungen über die psychophysische Fundamentalformel in Bezug auf den Gesichtssinn. Sitzungsber. der Akad. der Wiss. in Berlin. 1898. 2.)

Es sei nun eine Empfindung selbst (also nicht ein Empfindungsunterschied) eben noch bemerkbar, also von dem Mangel einer Empfindung noch unterscheidbar, demnach ihre Stärke = 1, und es sei der zugehörige Reiz =  $r_1$ . Es wächst dann die Empfindungsstärke zu 2, wenn der Reiz  $r_2 = r_1 + (1/\alpha)r_1 = r_1(1 + 1/\alpha)$  wird; sie wächst zu 3, wenn der Reiz  $r_3 = r_2 + (1/\alpha)r_2 = r_2(1 + 1/\alpha) = r_1(1 + 1/\alpha)^2$  wird etc. Entsprechend wollen wir die Empfindungsstärke = 0 setzen, wenn der Reiz  $r_0$  so gross ist, dass  $r_0(1 + 1/\alpha) = r_1$  wird, obgleich auch in Wirklichkeit jede Empfindung unmerklich oder  $< 1$  bleibt, sobald der Reiz  $< r_1$  ist, sodass  $r_0$  keine wirkliche Scheidegrenze verschiedener Empfindungen bildet. Diesen Reiz  $r_0$  wollen wir mit Fechner<sup>1)</sup> den *Schwellenwerth* des Reizes nennen und mit  $s$  bezeichnen. Man kann sich vorstellen, dass von diesem Schwellenwerthe des Reizes an die Empfindung beginnt, sich nach dem Weber'schen Gesetze über Nuli zu erheben, und dass sie merklich oder 1 wird bei  $r_1 = (1 + 1/\alpha)s$ . Wir erhalten dann die Empfindungen  $e = 0, 1, 2 \dots e$  entsprechend bei den Reizen  $r = s, s(1 + 1/\alpha), s(1 + 1/\alpha)^2, \dots s(1 + 1/\alpha)^e$ , oder es ist

$$r = s \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^e,$$

und daher

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log r = e \log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \log s, \quad \text{oder} \\ e = \frac{\log r - \log s}{\log \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \end{array} \right.$$

Um die Unveränderlichen  $s$  und  $\alpha$  zu ermitteln, stellte ich Versuche an. Ich benutzte ein kleines Benzinlicht von

p. 917—931 und 1889. 2. p. 641—644.) Sobald die Empfindung schmerzhaft wird, steigt die Verhältnisschwelle rasch, bis eine Steigerung der Empfindung nicht mehr möglich ist (Empfindungsschw. =  $\infty$ ), wie schon Hr. v. Helmholtz früher behauptete.

1) Elem. der Psychoph. 1. p. 238 ff. und 2. p. 13. Die folgenden Formeln stimmen im Wesentlichen mit denen Fechner's überein. Derselbe geht aber von unendlich kleinen Zuwachsen des Reizes und der Empfindungsgrösse aus und nimmt, wie bemerkt, keine bestimmte Einheit an, sondern führt eine unbestimmte Constante ein. Dem Sinne nach stimmt unsere folgende Formel mit der Unterschiedsformel Fechner's überein. 2. p. 97.

9 mm Flammenhöhe, welches die Helligkeit von 0,07 oder (1:14,3) Stearinlicht hatte. Denn im Abstände von 1,35 m von der Gypsplatte brachte es auf dieser dieselbe Helligkeit hervor, wie das Stearinlicht im Abstand von 5,11 m auf der benachbarten Platte; und es ist  $(1,35:5,11)^2 = 0,07 = 1:14,3$ . Ich stellte nun am dunklen Abend in einer Reihe von Zimmern im entferntesten die beiden Gypsplatten nebeneinander auf und liess durch die Thüren hindurch den Schein der Benzinflamme auf sie fallen; dem ohngeachtet konnte ich sie nicht bemerken. Ich näherte nun die Flamme bis die Platten sichtbar wurden. Die Entfernung der Flamme von ihnen war dann 18,82 m, daher die Helligkeit oder der Reiz  $r = 0,07:18,82^2 = 0,0001972$ , und die Empfindung  $e = 1$ . Als Einheit der Helligkeit war dabei, wie in der vorhergehenden Abhandlung, die Helligkeit der Gypsplatte bei senkrechter Beleuchtung durch eine Stearinkerze von 1 m Abstand angenommen. Ich liess dann, während die Flamme stehen blieb, die eine Platte näher rücken, bis sie heller erschien, als die andere. Sie hatte dann den Abstand von der Flamme = 18,34 m, ihre Helligkeit war daher  $r = 0,07:18,34^2 = 0,0002075$  und die Empfindung war 2. Der Unterschied der Reize  $\Delta r$  ist daher  $0,0002075 - 0,0001972 = 0,0000103$ , also  $\Delta r:r = (1:\alpha) = 0,0000103:0,0001972 = 0,052 = 1:19,2$ ; und  $1:(\alpha + 1) = 0,0000103:0,0002075 = 0,0496 = 1:20,2$ , also jedesmal  $\alpha = 19,2$ , und die Rechnung richtig. Nun liess ich die erste Platte näher rücken, bis sie eben merkbar heller als die zweite erschien, und erhielt den Abstand 16,25 m etc. Ich erhielt so die Abstände 18,82; 18,34; 16,25; 15,42; 14,24; 13,55 . . . und zuletzt 1,02; 0,97; 0,89; 0,86 m, wobei die letzte Aufstellung die 47., also  $e = 47$  war, sodass die Empfindungsstärke 47 Einheiten besass. Dabei ergaben sich der Reihe nach 46 Werthe von  $1:\alpha$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Aufstellungen oder Reizen, nämlich 0,052; 0,252; . . . oder ausgedrückt in Tausendtel: 52, 252, 111, 117, 121, 113, 152, 172, 206, 218, 165, 136, 107, 89, 78, 93, 70, 65, 156, 77, 161, 58, 91, 127, 92, 103, 194, 92, 236, 141, 216, 176, 297, 114, 167, 137, 169, 186, 226, 213, 138, 128, 226, 104, 190, 74. Man sieht, dass die Schwankungen sehr bedeutend waren, was zum Theil unvermeidlich sein wird, und in der Unsicherheit der Auffassung

der Deutlichkeit liegt, womit der Helligkeitsunterschied bemerkbar ist.

Andere in der vorhergehenden Abhandlung angeführte Versuche (p. 648) haben ergeben, dass bei der Gleichschätzung zweier Helligkeiten der grösste Abstand derselben vom Mittel zu der Helligkeit selbst das Verhältniss 0,0406 besass, und dies ist kleiner als die kleinste der obigen Zahlen (0,052). Wäre die erstere Zahl unter den gleichen Umständen wie die letztere, also auch mit der kleinen Benzinflamme ermittelt, so könnte man in die Mitte zwischen beiden, also bei 0,046, die eigentliche Grenze der Erkennbarkeit des Unterschiedes setzen. Das Ueberragen der beobachteten Zahlen über diese Grenze rührt von der im Begriffe der Empfindungseinheit angenommenen Erkennbarkeit des Empfindungsunterschiedes her, und ihr Schwanken von dem Wechsel in dem augenblicklich verlangten Grade der Deutlichkeit des Erkennens.

Wollte man statt dessen jene Grenze der Erkennbarkeit einführen, so müsste man von beiden Seiten her, von der der Gleichschätzung und von der der merklichen Unterscheidbarkeit für jede zu erlangende Zahl eine sehr grosse Anzahl von Messungen ausführen, um darunter die äussersten Zahlen mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erhalten. Wir ziehen es aber vor, wie es auch Fechner that, nach dem gegebenen Begriffe die eben merkliche Unterscheidbarkeit zu benutzen. Dabei muss immerhin ein gewisser Grad von Deutlichkeit eintreten, und diesen Grad muss man möglichst gleich schätzen. Die Bezeichnung „eben merklich“ bedeutet dabei nur einen möglichst geringen, aber doch sicher merklichen Grad des Unterschiedes. Die dabei eintretenden Schwankungen werden wir durch Nehmen des Mittels aus einer grösseren Anzahl von Einzelbeobachtungen möglichst unwirksam machen.

Bei den angeführten Versuchen wurden also zwischen der Dunkelheit und derjenigen Helligkeit, welche bei dem Lichtabstande von 0,86 m herrschte, oder bei  $r = 0,07 : 0,86^2 = 0,0948$ , 46 erkennbar verschiedene Helligkeiten eingeschaltet, oder die letzte Empfindungsstärke war  $e = 47$ . Dadurch kann man den mittleren Werth von  $\alpha$  und den Schwellenwerth  $s$  berechnen, indem man in Formel (1) die zusammengehörigen Werthe  $e = 1$ ,  $r = 0,0001972$  und  $e = 47$ ,  $r = 0,0948$  einsetzt,

und von den beiden so gewonnenen Gleichungen die eine von der anderen abzählt. Es fällt dadurch  $s$  aus, und man erhält

$$\log \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\log 0,0948 - \log 0,0001972}{47 - 1} = 0,058307,$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0,1437, \alpha = 6,96,$$

oder nahezu  $= 7$ . Man erkennt also den Unterschied zweier Helligkeiten gerade deutlich, wenn er  $\frac{1}{7}$  der geringeren, oder  $\frac{1}{8}$  der grösseren dieser Helligkeiten ist.

Hieraus erhält man aber

$$s = \frac{0,0001972}{1 + 0,1437} = 0,0001728,$$

sodass die obigen Formeln werden

$$r = 0,0001728 \cdot 1,1437^e, \quad e = \frac{\log r - \log 0,0001728}{0,058312}.$$

Um die durch jede dieser Gleichungen dargestellte logarithmische Linie  $k$  mittels ihrer Coordinaten  $r$  und  $e$  zu verzeichnen, trage man (Fig. 1) auf der Axe  $r$  für  $e = 0$  die  $r = s = 0,0001728$  als  $OS$  auf. Für  $e = 1$  wächst  $r$  zu  $s \cdot 1,1437 = OC$ , oder um  $s \cdot 0,1437 = SC$ . Zieht man nun aus irgend einem Punkte  $A$  der Axe  $r$  einen Kreisbogen mit dem Halbmesser  $AB = OA \cdot 0,1437$  und an ihn die Tangente  $OB$  aus  $O$ , so ist auch der Abstand  $SC$  des Punktes  $S$  von  $OB = OS \cdot 0,1437$  oder gleich jenem Zuwachse  $SC$  des  $r$ . Zu  $r = OC$  gehört dann  $e = 1$ . Wächst nun  $r$  weiter um  $CD = CD'$ , so gehört zu  $D$ ,  $e = 2$  etc. Weil aber beim Aneinanderreihen der Zuwachse der  $r$  die Fehler sich addiren, so berechnet man zweckmässig einige  $r$ , und findet so z. B. für  $e = 10$ ,  $r = 0,0006617$ , wonach man die construirten Punkte verbessert. — Indem man die *logarithmische Linie* in ihrem ganzen Verlaufe gelten lässt, erhält man auch Bruchtheile von Helligkeiten, welche anzeigen, wie weit man bei einem sprungweisen Fortschreiten der Helligkeitsempfindung um Einheiten noch von einem folgenden merkbaren Zuwachse entfernt sein würde.

Die Grössen  $s$  und  $\alpha$ , welche bei derselben Person auf einige Zeit so gut wie unveränderlich sind, wechseln, wie schon angedeutet, mit der Person, und bei derselben Person mit



bei  $H = 0,000065$ , und  $1 : \alpha$  der Reihe nach  $= 0,077; 0,100; \dots$  oder in Tausendtel 77, 100, 77, 48, 89, 74, 59, 96, 71, 108, 107, 58, 93, welche Werthe wesentlich kleiner als die früheren sind. Die letzte Helligkeit war 0,0001792 bei  $e = 14$ . Man findet dann den mittleren Werth von  $1 : \alpha = 0,0811 = 1 : 12,3$ ;  $s = 0,00006012$ ;  $r = 0,00006012 \cdot 1,0811^e$ .

Die Curve ist durch die Linie  $k_1$  der Figur 1 dargestellt.

Die Vergleichung der beiden Curven  $k$  und  $k_1$  zeigt, dass die Empfindungsstärken in hohem Grade mit der augenblicklichen Beschaffenheit des Sinneswerkzeuges wechseln. Es geht daraus hervor, dass die Maasszahl der Empfindungsstärke durchaus nicht allein von der Grösse des Reizes abhängt, sondern selbstverständlich auch von der Person und ihrer augenblicklichen Beschaffenheit. Man ist durch solche Untersuchungen in den Stand gesetzt, die *Empfindungsfähigkeiten oder Empfindlichkeiten*<sup>1)</sup> verschiedener Personen oder derselben Person zu verschiedenen Zeiten mit einander zu vergleichen.

Dabei macht es aber einen Unterschied, ob man die Unterschiedsschwellen oder die Reizschwellen mit einander vergleicht. Im ersteren Falle verhalten sich zwei Empfindlichkeiten  $E_u$  und  $E_u'$  wie die Zahlen  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Denn wenn eine Person  $\frac{1}{20}$ , eine andere erst  $\frac{1}{10}$  der Zunahme eines Reizes empfindet, so verhalten sich ihre Empfindlichkeiten wie 20:10. Es verhalten sich also die *Unterschiedsempfindlichkeiten* umgekehrt wie die Unterschiedsswellen, oder grade wie deren reciproke Werthe, oder es ist

$$E_u : E_u' = \frac{1}{\alpha'} : \frac{1}{\alpha} = \alpha : \alpha'.$$

Ebenso verhalten sich offenbar die *Schwellenempfindlichkeiten* umgekehrt wie die Reizschwellen, oder

$$E_s : E_s' = s' : s.$$

Bei unseren Versuchen war für das an das Licht gewöhnte Auge  $\alpha = 6,96$ ,  $s = 0,0001728$ , und für das an Dunkelheit gewöhnte  $\alpha' = 12,3$ ,  $s' = 0,00006012$ . Daher war

$$E_u : E_u' = 6,96 : 12,3 = 1 : 1,77, \text{ und}$$

$$E_s : E_s' = 0,00006012 : 0,0001728 = 1 : 2,86.$$

1) Vgl. Fechner, Elem. d. Psychophysik. 1. p. 69 ff. und 2. p. 142 ff.



Beiderlei Empfindlichkeiten haben sich also nicht gleichförmig geändert, sondern die Schwellenempfindlichkeit mehr als die Unterschiedsempfindlichkeit. Dass sich erstere durch die Gewöhnung an die Dunkelheit stark erhöht, ist bekannt, indem der Gewöhnte lesen kann, wo der aus dem Hellen kommende nichts zu unterscheiden vermag.

Eine *absolute*, von der Person und ihrem Zustande unabhängige *Empfindungseinheit* kann man, wie schon oben angedeutet, nach der Angabe Fechners<sup>1)</sup> dadurch erhalten, dass man die Zunahme der Empfindung, welche durch eine bestimmt angegebene verhältnissmässige Zunahme des Reizes, bei einer gewissen Stärke des Reizes, hervorgebracht wird, als Empfindungseinheit bezeichnet, oder mit andern Worten, dass man einen bestimmten Grad der Empfindlichkeit zu Grunde legt. Da bei unseren obigen Versuchen dies Verhältniss der Reizzunahme zum Reize das einmal 1:6,96, das anderemal 1:12,3 war, so könnte man, den thatsächlichen Verhältnissen entsprechend, für die absolute Empfindungseinheit den zwischenliegenden, durch runde Zahlen ausgedrückten Werth 1:10, oder  $\alpha = 10$ , wählen. Die Empfindungsstärke würde also innerhalb der Grenzen der obigen Versuche, und auch noch weiter, um Eins zunehmen, wenn der Reiz um  $\frac{1}{10}$  seiner Stärke zunimmt.

Damit ist man aber noch nicht imstande, die *Empfindungsstärke* selbst in absoluter Weise mit einer bestimmten Maasszahl zu bezeichnen. Es muss hierzu noch der Anfangspunkt des Messens, oder die Empfindungsschwelle angenommen sein, welche durch den zugehörigen Reiz bezeichnet wird. Dabei ist es auch nothwendig, die Reize in absoluten Maassen anzugeben, während bei unseren Versuchen diejenige Helligkeit als Reizeinheit angenommen wurde, unter welcher die Gypsplatte bei senkrechtem Beschauen erschien, wenn sie durch eine Stearinkerze im Abstände von 1 m senkrecht beleuchtet wurde. Diese Gypsplatte hatte aber nach meinen Versuchen<sup>2)</sup> nur ein Rückstrahlungsvermögen (albedo) von 0,72, so dass die absolute Helligkeit in jenem Falle nicht Eins, sondern 0,72

1) Fechner, über die psychischen Maassprincipien, a. a. O. p. 186, unterster Absatz.

2) Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. 1884. p. 404.

war. Dadurch ergeben sich in den beiden beobachteten Fällen die Werthe der Reizschwellen zu  $s = 0,72 \cdot 0,0001728 = 0,0001244$  und  $s' = 0,72 \cdot 0,00006012 = 0,00004329$ , während die Reizverhältnisse  $\alpha$  nicht verändert werden. Nimmt man zum Messen der absoluten Empfindungsstärke auch hier einen zwischenliegenden rundzahligen Werth  $s = 0,0001$ , so erhält man für den *absoluten Werth der Empfindungsstärke* aus (1) die Formel

$$e = \frac{\log r - \log 0,0001}{\log (1 + 0,1)} = \frac{\log r + 4}{0,041393}.$$

Für  $r = 1$  würde daraus  $e = 96,6$ ; d. h. eine Platte vom Rückstrahlungsvermögen 1, durch eine Stearinkerze im Abstand von 1 m senkrecht beleuchtet, würde bei senkrechtem Beschaun die absolute Empfindungsstärke von 96,6 hervorbringen.

Durch dieses absolute Maass der Empfindungsstärke erhält man auch ein *absolutes Maass für die Empfindlichkeit*, indem man die Empfindlichkeiten, welche die absolute Empfindungsstärke herbeiführen, gleich Eins setzt. Bei unseren Versuchen waren für das ans Licht gewöhnte Auge  $\alpha = 6,96$  und in absolutem Helligkeitsmaasse  $s = 0,0001244$  und für das an Dunkelheit gewöhnte  $\alpha' = 12,3$ ,  $s' = 0,00004329$ . Für die absoluten Maasse nahmen wir an  $\alpha_0 = 10$ ,  $s_0 = 0,0001$ . Daher sind bei unseren Versuchen die *absoluten Unterschieds- und Schwellenempfindlichkeiten*

$$E_u = \frac{6,96}{10} = 0,696, \quad E_u' = \frac{12,3}{10} = 1,23;$$

$$E_s = \frac{0,0001}{0,0001244} = 0,803, \quad E_s' = \frac{0,0001}{0,00004329} = 2,31.$$

# IX. Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle; von W. Voigt.

(Aus den Abhandl. der königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen Bd. XXXVI und XXXVIII im Auszug mitgetheilt.)<sup>1)</sup>

Die innere Reibung, welche bei Flüssigkeiten längst ausführlich untersucht ist, nun auch bei festen Körpern einer theoretischen und experimentellen Behandlung zu unterwerfen, ist das Ziel, welches ich mir in den oben genannten Abhandlungen gesteckt habe.

## I. Theorie.

Die Grundvoraussetzung der Theorie ist die Annahme, dass die in den festen Körpern infolge der inneren Reibung wirkenden Druckcomponenten ebenso, wie in Flüssigkeiten, als lineare Functionen der Deformationsgeschwindigkeiten  $x'_x, y'_y, z'_z, y'_z, z'_x, x'_y$  angesehen werden können. Bezeichnet man die *Gesamtdrucke* durch  $(X_x), \dots$  die von der Elasticität herührenden Antheile durch  $X_x, \dots$ , die der Reibung entsprechenden durch  $A_x, \dots$ , so ist dann

$$(X_x) = X_x + A_x, \dots$$

und es gilt der Ansatz:

$$-X_x = c_{11}x'_x + c_{12}y'_y + c_{13}z'_z + c_{14}y'_z + c_{15}z'_x + c_{16}x'_y,$$

und

$$-A_x = a_{11}x'_x + a_{12}y'_y + a_{13}z'_z + a_{14}y'_z + a_{15}z'_x + a_{16}x'_y,$$

in welchem bezüglich der *Elasticitätsconstanten* zwar gilt  $c_{hk} = c_{kh}$ , *allgemeine* Relationen zwischen den 36 *Constanten*  $c_{hk}$  der *inneren Reibung* aber nicht bestehen.

Specielle Beziehungen treten auf, wenn der untersuchte feste Körper ein Krystall ist und man die in allen Gebieten

1) Im Einzelabdruck „Ueber die innere Reibung der festen Körper, insbesondere der Krystalle“ (Göttingen, 1890), und „Bestimmung der Constanten der Elasticität und Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle“ (Göttingen, 1892).

der Krystallphysik gebräuchliche Annahme macht, dass die Symmetrie des physikalischen Verhaltens durch die Symmetrie der Krystallform bestimmt wird. Ihre Verfolgung reducirt, falls man ein durch Symmetrieeigenschaften ausgezeichnetes Coordinatensystem zu Grunde legt, die Anzahl der voneinander unabhängigen Reibungsconstanten erheblich, sodass die hinsichtlich der Elasticitätserscheinungen gleichwerthigen Gruppen auch hier gleichwerthig bleiben, aber die Anzahl der ihnen entsprechenden Reibungsconstanten stets grösser ist, als die der Elasticitätsconstanten.

Man erhält folgende Resultate:

	Reibungs- constanten	Elasticitäts- constanten
Triklines System . . . . .	36	21
Monoklines System . . . . .	20	13
Rhombisches System . . . . .	12	9
Quadratisches System: I. Abtheilung. . . . .	7	6
" II. Abtheilung. . . . .	9	7
Hexagonales System: I. Abtheilung. . . . .	6	5
" II. Abtheilung. . . . .	8	6
" III. Abtheilung. . . . .	11	7
Reguläres System. . . . .	3	3
Isotrope Körper . . . . .	2	2

Das Verhältniss ändert sich, wenn man die Definition der inneren Reibung etwas enger fasst, als oben geschehen ist, und nur diejenigen Antheile der  $A_x, \dots$  als ihr entsprechende Druckcomponenten gelten lässt, welche bei allen Bewegungserscheinungen eine Energie absorbirende Wirkung üben.

Diese Antheile erhält man, indem man z. B.  $A_x$  in  $A'_x$  und  $A''_x$  so zerlegt, dass

$$A_x = A'_x + A''_x$$

und

$$-A'_x = a_{11} x'_x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} y'_y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} z'_z + \dots + \frac{a_{16} + a_{61}}{2} x'_y,$$

$$-A''_x = \frac{a_{12} - a_{21}}{2} y'_y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2} z'_z + \dots + \frac{a_{16} - a_{61}}{2} x'_y,$$

ist. Dann gibt das System der  $A''_x, \dots$  zur Arbeit der Druckkräfte einen verschwindenden Antheil, und demgemäss keine Absorption von Energie; das System der  $A_x, \dots$  stellt von diesem Standpunkte aus die Druckcomponenten der inneren

Reibung dar. Betrachtet man dann in ihnen die Aggregate

$$\frac{a_{hk} + a_{kh}}{2} = b^{hk}$$

als die Reibungsconstanten, so ist vermöge der für sie geltenden Beziehung  $b_{hk} = b_{kh}$  ihre Anzahl in jedem Krystallsysteme ebenso gross, als die Anzahl der Elasticitätsconstanten.

Die Werthe der  $(X_x) \dots$ , nämlich

$$(1) \quad \begin{cases} -(X_x) = c_{11} x_x + c_{12} y_y + \dots + c_{16} x_y \\ \quad \quad \quad + a_{11} x'_x + a_{12} y'_y + \dots + a_{16} x'_y, \end{cases}$$

können, wenn die Glieder der zweiten Reihe klein gegen diejenigen der ersten sind, zur Bestimmung angenäherter Werthe der Deformationsgrössen  $x_x \dots$  dienen. Wirkt nämlich keine innere Reibung, so ist

$$-x_x = s_{11}(X_x) + s_{12}(Y_y) + \dots + s_{16}(X_y),$$

und unter Benutzung dieses Resultates erhält man leicht in zweiter Annäherung

$$(2) \quad \begin{cases} x_x = -(s_{11}(X_x) + s_{12}(Y_y) + \dots + s_{16}(X_y)) \\ \quad \quad \quad + (n_{11}(X'_x) + n_{12}(Y'_y) + \dots + n_{16}(X'_y)), \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

worin

$$(2') \quad n_{ab} = \sum_h \sum_k a_{hk} s_{ha} s_{kb}$$

ist. Die Grössen  $s_{hk}$  heissen die *Elasticitätsmoduln*, die  $n_{hk}$  die *Reibungsmoduln* der betrachteten Substanz.

Die Formeln (2) sind aus (1) durch ein Annäherungsverfahren erhalten, sie erscheinen also als ungenauer wie (1); es hindert aber nichts, eben *sie* als den ursprünglichen Ansatz zu betrachten und (1) als aus ihnen abgeleitet. Für die Anwendungen kommen die Gleichungen (2) in erster Linie in Betracht.

Die Beobachtungen knüpfen an die Dämpfung von Schwingungen elastischer Stäbe an und demgemäss beziehen sich die theoretischen Entwicklungen ebenfalls nur auf solche.

Die Stäbe mögen auf ein Coordinatensystem bezogen werden, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt des einen Endquerschnittes liegt; die  $X$ - und  $Y$ -Axe fallen je in eine Hauptträgheitsaxe des Querschnittes, die  $Z$ -Axe ist die Stabaxe.

Die Bewegung möge so stattfinden, dass in jedem Moment die Deformationen längs der Stabaxe constant sind. Dies kann auf zwei Weisen erreicht werden. Die für die Anwendung in erster Linie in Betracht kommende Anordnung, welche in diesem Auszuge allein betrachtet werden mag, ist, dass der Stab in dem ersten Endquerschnitt  $z = 0$  festgehalten wird und in dem zweiten Endquerschnitte  $z = L$  geeignet mit einer grossen trägen Masse verbunden ist, sodass er sich nicht bewegen kann, ohne jene mitzuführen.

Ist dann die Dauer einer Schwingung des aus Stab und träger Masse bestehenden Systemes sehr gross gegen die Zeit, die irgend eine elastische Verrückung zur Fortpflanzung über die Länge des Stabes braucht, so kann man die Verrückungen an jeder Stelle des Stabes ebenso bestimmen, als wenn derselbe bei der gleichen Ablenkung des Endquerschnittes im Gleichgewicht wäre. Ist also die träge Masse so befestigt, dass bei jeder möglichen Verrückung derselben der Stab gleichförmig deformirt wird, so wird er es auch während der Schwingungen in jedem Moment sein.

Demgemäss kann man für die Verrückungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Ansätze machen:

$$(3) \quad \begin{cases} u = U - z \left( \frac{g_1 x}{2} + h y \right) \\ v = V - z \left( \frac{g_2 y}{2} - h x \right) \\ w = W + z (g_1 x + g_2 y + g_3). \end{cases}$$

Hierin sind  $U$ ,  $V$ ,  $W$  gewisse Functionen von  $x$  und  $y$  allein, die für die Zwecke des Experimentes nicht in Betracht kommen,  $g_1$  und  $g_2$  sind die reciproken Krümmungsradien der Curven, die durch Projection der Axe des Stabes auf die  $XZ$ - und  $YZ$ -Ebene erhalten werden,  $g_3$  ist die lineare Dilation dieser Axe,  $h$  ist die gegenseitige Drillung zweier um die Längeneinheit voneinander entfernten Querschnitte um die  $Y$ -Axe.

Aus der dritten der Gleichungen (2), welche nach Einsetzen von (3) lautet:

$$(4) \quad \begin{cases} g_1 x + g_2 y + g_3 = - (s_{31}(X_x) + s_{32}(Y_y) + \dots + s_{36}(X_y)) \\ \quad + (n_{31}(X_x') + n_{32}(Y_y') + \dots + n_{36}(X_y')), \end{cases}$$

bestimmt sich  $g_1, g_2, g_3$  durch Multiplication mit  $x dq, y dq, dq$  und Integration über den ganzen Querschnitt  $Q$ , wie folgt:

$$(5) \quad \begin{cases} g_1 Q x_y^2 = s_{33} M + s_{43} \frac{N}{2} - n_{33} M' - n_{43} \frac{N'}{2}, \\ g_2 Q x_x^2 = s_{33} A - s_{53} \frac{N}{2} - n_{33} A' + n_{53} \frac{N'}{2}, \\ g_3 Q = s_{33} \Gamma - n_{33} \Gamma'. \end{cases}$$

Hierin bezeichnet  $\Gamma$  die auf den freien Querschnitt auszuübende Zugkraft parallel der  $Z$ -Axe, und  $A, M, N$  die um die Coordinatenachsen  $X, Y, Z$  daselbst auszuübenden Drehungsmomente, die erforderlich sind, um die durch  $g_1, g_2, g_3$  und  $h$  charakterisirten Deformationen hervorzubringen;  $x_x$  und  $x_y$  sind die Trägheitsradien des Querschnittes um die  $X$ - und  $Y$ -Axe.

Ähnlich, aber etwas umständlicher erhält man den Werth von  $h$ , weil er zunächst speciell einem *elliptischen* Cylinder entspricht:

$$(6) \quad h Q = \left( \frac{s_{44} N - n_{44} N'}{4 x_y^2} + \frac{s_{55} N - n_{55} N'}{4 x_x^2} \right) + \left( \frac{s_{34} M - n_{34} M'}{2 x_y^2} - \frac{s_{35} A - n_{35} A'}{2 x_x^2} \right).$$

Der zweite Theil gilt ungeändert auch für beliebige Querschnitte; in dem ersten treten für andere als elliptische Querschnitte an Stelle von  $x_x$  und  $x_y$  andere Functionen  $x_1$  und  $x_2$  auf, die meist nur angenähert zu bestimmen sind.

Die Resultate vereinfachen sich, wenn die Axe des Cylinders senkrecht zu einer krystallographischen Symmetrieebene des untersuchten Körpers steht, in denen  $s_{34} = s_{35} = 0$  ist. Man erhält hier

$$(7) \quad \begin{cases} g_1 Q h_y^2 = s_{33} M - n_{33} M', \\ g_2 Q h_x^2 = s_{33} A - n_{33} A', \\ g_3 Q = s_{33} \Gamma - n_{33} \Gamma', \\ h Q = \left( \frac{s_{44}}{x_2^2} + \frac{s_{55}}{x_1^2} \right) \frac{N}{4} - \left( \frac{n_{44}}{x_2^2} + \frac{n_{55}}{x_1^2} \right) \frac{N'}{4}. \end{cases}$$

Sind die betrachteten Stäbe an ihrem freien Enden, wie oben vorausgesetzt, mit grossen trägen Massen fest verbunden, so sind  $-\Gamma, -A, -M, -N$  die Kraft und die Momente, die sie auf letztere ausüben. Wenn die Massen also resp. um die  $X, Y, Z$ -Axe drehbar sind, so würden ihre Bewegungen gegeben sein durch die Gleichungen



$$(8) \quad \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -A, \quad \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -M, \quad \mathfrak{M}_z \psi_z'' = -N,$$

in denen die  $\mathfrak{M}$  die Trägheitsmomente der betreffenden Massen, die  $\psi$  ihre Drehungswinkel gegen die Ruhelagen bezeichnen; letztere stehen mit den Grössen  $g_h$  und  $h$  in der Beziehung, dass  $g_1 = \psi_y / L$ ,  $g_2 = \psi_x / L$ ,  $h = \psi_z / L$  ist.  $A$ ,  $M$ ,  $N$  lassen sich aus den Gleichungen (7) und (8) auf zweierlei Weise eliminiren. Einmal, indem man die Gleichungen (7) in der früher benutzten Annäherung nach  $A$ ,  $M$ ,  $N$  auflöst und die erhaltenen Werthe einsetzt. Dann ergibt sich resp.

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x \psi_x'' = -\frac{Q x_2^2}{L s_{33}} \left( \psi_x + \frac{n_{33}}{s_{33}} \psi_x' \right), \\ \mathfrak{M}_y \psi_y'' = -\frac{Q x_3^2}{L s_{33}} \left( \psi_y + \frac{n_{33}}{s_{33}} \psi_y' \right), \\ \mathfrak{M}_z \psi_z'' = -\frac{4 Q x_1^2 x_2^2}{L (x_1^2 s_{44} + x_2^2 s_{55})} \left( \psi_z + \frac{x_1^2 n_{44} + x_2^2 n_{55}}{x_1^2 s_{44} + x_2^2 s_{55}} \psi_z' \right). \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen gewissermaassen den Ausgangsgleichungen (1). Ferner kann man  $A$ ,  $M$ ,  $N$  aus (8) entnehmen und in (7) einsetzen. Dann folgt:

$$(10) \quad \begin{cases} M_x L (s_{33} \psi_x'' - n_{33} \psi_x''') + Q x_2^2 \psi_x = 0, \\ M_y L (s_{33} \psi_y'' - n_{33} \psi_y''') + Q x_3^2 \psi_y = 0, \\ M_z L \left( \left( \frac{s_{44}}{x_2^2} + \frac{s_{55}}{x_1^2} \right) \psi_z'' - \left( \frac{n_{44}}{x_2^2} + \frac{n_{55}}{x_1^2} \right) \psi_z''' \right) + 4 Q \psi_z = 0. \end{cases}$$

ein Formelsystem, das den Ausgangsgleichungen (2) entspricht.

Wenn die  $n_{hk}$  klein gegen die  $s_{hk}$  sind, geben beide Systeme dieselben Resultate. Sie enthalten die Theorie der angestellten Beobachtungen, soweit dieselben von der inneren Reibung abhängen.

Die Gleichungen (9), von denen wir weiterhin ausgehen wollen, fallen unter die Form

$$(11) \quad \psi'' + \beta (\psi + \psi' \alpha) = 0,$$

worin  $\alpha$  die Dämpfungsconstante für die betrachtete Schwingung heissen mag; sie ist für die Biegungsschwingungen unter den gemachten Voraussetzungen stets vom Querschnitt des Stabes unabhängig und nur eine Function der Orientirung seiner Axe gegen die Krystallaxen; bei Drillungsschwingungen gilt dies nur, wenn die Orientirung derart ist, dass  $s_{44} = s_{55}$ ,  $n_{44} = n_{55}$

ist, d. h. die Längsaxe in eine mehr als zweizählige Symmetriexaxe fällt.

Die Gleichung (10) wird integrirt durch

$$(12) \quad \psi = A e^{-\frac{\lambda t}{T}} \cos \frac{2\pi}{T}(t - t'),$$

worin

$$(13) \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\beta - \frac{\beta^2 \alpha^2}{4}}, \quad \frac{\lambda}{T} = \frac{\beta \alpha}{2},$$

ist;  $\lambda$  hat dabei die Bedeutung des logarithmischen Decrementes,  $T$  die der Schwingungsdauer. Ist, wie in unserem Falle stets,  $\beta \alpha^2 / 4$  klein neben 1, so kann man in der letzten Formel  $\beta$  mit  $4\pi^2 / T^2$  vertauschen und erhält so den Werth der Dämpfungsconstante  $\alpha$  allein durch die beobachtbaren Grössen  $\lambda$  und  $T$

$$(14) \quad \alpha = \frac{\lambda T}{2\pi^2}.$$

Die zunächst mitgetheilten Beobachtungen beziehen sich auf isotrope oder quasi-isotrope Körper, nämlich Metalle. Die Stäbe sind, um die Isotropie möglichst wenig durch die Bearbeitung zu stören, aus eigens gegossenen Blöcken vorsichtig und ohne erhebliche Erwärmung ausgesägt, mit scharfem Stichel eben abgedreht und schliesslich mit Schmirgel geschliffen und polirt.

Für isotrope oder quasi-isotrope Körper vereinfachen sich die obigen Formeln sämmtlich sehr erheblich.

Von den Elasticitäts- und Reibungsconstanten  $c_{hk}$  und  $a_{hk}$ , ebenso von den Elasticitäts- und Reibungsmoduln  $s_{hk}$  und  $n_{hk}$ , sind nur je neun von Null verschieden; zwischen ihnen bestehen dabei folgende Beziehungen:

$$(15) \quad \begin{cases} c_{11} = c_{22} = c_{33} = c, & c_{23} = c_{31} = c_{12} = c_1, & c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{c - c_1}{2} = c_2, \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a, & a_{23} = a_{31} = a_{12} = a_1, & a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{a - a_1}{2} = a_2, \\ s_{11} = s_{22} = s_{33} = s, & s_{23} = s_{31} = s_{12} = s_1, & s_{44} = s_{55} = s_{66} = 2(s - s_1) = s_2, \\ n_{11} = n_{22} = n_{33} = n, & n_{23} = n_{31} = n_{12} = n_1, & n_{44} = n_{55} = n_{66} = 2(n - n_1) = n_2; \end{cases}$$

in ihnen sind  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $s$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  und  $n$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  neue Bezeichnungen.

Hieraus folgen die Werthe der Dämpfungsconstanten für Biegungs- und Drillungsschwingungen:

$$(16) \quad \alpha_\beta = \frac{n_{22}}{s_{22}} = \frac{n}{s}, \quad \alpha_\gamma = \frac{n_{44}}{s_{44}} = \frac{n_2}{s_2}.$$

Sind dieselben durch die Beobachtung gemäss der Formel (14) bestimmt, so erhält man aus ihnen, falls die Elasticitätsmoduln  $s, s_1$  bekannt sind, zunächst sogleich die der Substanz entsprechenden Reibungsmoduln, und da nach (2') und (15)

$$(17) \quad \begin{cases} n = 2 a_2 (s^2 + 2 s_1^2) + a_1 (s + 2 s_1)^2 \\ n = a_2 s_2^2 \end{cases}$$

ist, auch leicht die Werthe der Reibungsconstanten  $a_1, a_2$ , woraus nach (15)  $a$  folgt.

Wie die Elasticitätsmoduln aus Schwingungsbeobachtungen gefunden wurden, soll an einer anderen Stelle ausführlicher erörtert werden, da die erhaltenen Zahlen ein selbständiges Interesse besitzen.

## II. Die Beobachtungsmethode.

Der Messung zu unterwerfen war nach dem oben Gesagten die Dauer und das logarithmische Decrement der Biegungs- und Drillungsschwingungen prismatischer Stäbe; und zwar sollten die Schwingungen durch die Verbindung der Stäbe mit grossen trägen Massen verlangsamt werden und ausserdem so stattfinden, dass die Stäbe in jedem Moment längs ihrer Axe gleichförmig deformirt wären. Durch welche Mittel dies erreicht wurde, kann hier nur ganz kurz angedeutet werden.

Der Apparat zur Beobachtung der *Biegungsschwingungen* bestand aus einer etwa 1200 g schweren Messingscheibe von 20 cm Durchmesser, welche um ihre, durch eine Carneolschneide gebildete und horizontal gelegene Axe drehbar war. Das zu untersuchende, vertical gestellte Stäbchen wurde mit seinem *unteren* Ende ( $z = 0$ ) geeignet in einem Halter befestigt, mit seinem *oberen* ( $z = L$ ) mit einer Stelle der Scheibe so verbunden, dass seine Axe dort in einen Radius der Scheibe fiel; der Mittelpunkt des Stäbchens fiel während der Ruhe in die Drehungsaxe der Scheibe. Wenn nun die Scheibe eine kleine Drehung erfuhr, so krümmte sich das Stäbchen gleichförmig, d. h. nach einem Kreisbogen und die eintretende Be-

wegung der Scheibe entsprach in der That nahe der obigen Gleichung ( $9^1$  resp.  $9^2$ ).

Für die Beobachtung der *Drillingsschwingungen* wurde das vertical gestellte Stäbchen an seinen oberen Ende in einen Halter gefasst und mit seinem unteren so mit einer horizontal liegenden Kreisscheibe von Messing verbunden, dass die beiderseitigen Axen zusammenfielen. Das Trägheitsmoment der Scheibe konnte durch Aufschrauben eines Verstärkungsringes vergrößert werden; die meisten Beobachtungen sind mit demselben angestellt worden. Bei einer Drehung der Scheibe um ihre Axe trat eine gleichförmige Drilling des Stäbchens ein und die Bewegung folgte nahezu der Gleichung ( $9^3$ ).

Die Verbindung der Stäbchen mit den Haltern einerseits, den Scheiben andererseits geschieht so, dass die Enden der Stäbchen in kräftige Messingklötze eingelöthet, resp. wenn unlöthbar, eingekittet und diese Klötze an die betreffenden Theile durch Schrauben befestigt wurden. Die Einlöthung resp. Einkittung musste sehr vorsichtig geschehen, damit nicht bei den Schwingungen in den Befestigungsstellen dämpfende Kräfte entstanden, welche die in den Stäbchen selbst wirkenden weit übertrafen. Die hieraus entspringende Fehlerquelle erschwerten die Beobachtungen in der unangenehmsten Weise.

Weiter kam störend in Betracht die Inhomogenität des Materiales, die anscheinend trotz aller Vorsicht durch die Bearbeitung entstand; die Oberflächenschicht der Stäbchen wurde nämlich durch das Feilen, Schleifen und Poliren dichter als das Innere und verlor dadurch an innerer Reibung. Dies zeigte sich darin, dass dünnere Stäbchen mitunter auffällig geringere Dämpfungsconstanten ergaben als dickere. Diese Fehlerquelle konnte durch Benutzung scharfer Instrumente für die Bearbeitung verkleinert, aber nicht ganz beseitigt werden, und erschwerte gleichfalls die Messungen.

Bei dem Drillungsapparate stellte die Schwierigkeit, reine Drillingsschwingungen hervorzubringen, eine bedeutende Fehlerquelle dar; jederzeit, wenn die Centrirung von Stäbchen und Scheibe nicht vollständig war, verwandelten sich im Laufe der Beobachtungen die Drillingsschwingungen zum Theil in Biegungsschwingungen, welche sehr viel mehr gedämpft wurden und daher unverhältnissmässig viel Energie verschwinden liessen.

Der Einfluss des Luftwiderstandes wurde durch eigene Beobachtungen ausgewerthet und in Rechnung gezogen. Bei dem Biegungsapparate geschah dies so, dass die Messingscheibe durch geeignete Veränderung der Massenvertheilung in ein Pendel verwandelt wurde, das auch ohne angebrachte Stäbchen Schwingungen ausführte. Deren Dämpfung gestattet den Einfluss des Luftwiderstandes und der Axenreibung zugleich zu bestimmen. Bei dem Drillungsapparate wurde die Messingscheibe bifilar aufgehängt und so in Schwingungen versetzt.

War das logarithmische Decrement bei diesen Beobachtungen  $= \lambda^0$ , die Schwingungsdauer  $= T^0$ , und ergab die definitive Beobachtung mit den Metallstäbchen resp.  $\lambda$  und  $T$ , so berechnet sich die dem Metall entsprechende Dämpfungsconstante

$$(18) \quad \alpha = \frac{T^2}{2\pi^2} \left( \frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda^0}{T^0} \right).$$

Für den Biegungsapparat wuchs während der etwa 2 Jahre dauernden Beobachtungen infolge der Abnutzung der Carneol-schneide  $\lambda^0/T^0$  allmählich von 0,000231 bis 0,000253, für den Drillungsapparat blieb es gleich 0,000154 und zwar galt dieser Werth eigenthümlicher Weise mit und ohne Verstärkungsring.

Bei den Metallen mit geringer innerer Reibung rührte ein sehr bedeutender Theil der schliesslich beobachteten Dämpfung vom Luftwiderstande her, bei den mit grosser konnte er fast vernachlässigt werden.

Die eigentliche Untersuchung des logarithmischen Decrementes bot wegen der Kleinheit der Schwingungsdauer einige Schwierigkeit. Schliesslich lieferte eine photographische Methode alle zu wünschende Genauigkeit und Bequemlichkeit.

Mit den schwingenden Scheiben war je ein kleiner Hohlspiegel verbunden, der das Bild eines sehr feinen Inductions-funkens auf eine rotirende, mit photographischem Papier überzogene Trommel warf. Auf demselben erschien bei der Entwicklung des Bildes eine sehr zarte, aus unzähligen feinen Pünktchen gebildete Wellenlinie mit abnehmender Amplitude, deren Ausmessung mit dem Kathetometer vorgenommen werden konnte.

Die Resultate dieser Messungen zeigten, dass das logarithmische Decrement  $\lambda$  bei einer und derselben Beobachtungs-

weise mit der Amplitude  $A$  und zwar bei starker Dämpfung sehr stark abnahm; die Abnahme liess sich indess durch die Formel

$$(19) \quad \lambda = A + A_1 A^2,$$

die sich auch theoretisch rechtfertigen lässt, ausserordentlich genau darstellen. Bezüglich der Berechnung von  $A$  und  $A_1$  aus der Reihe der gemessenen Amplituden muss ich mich begnügen auf die Originalarbeit zu verweisen.

Die auf unendlich kleine Amplituden bezogenen Decremente  $A$  sind dann in Formel (18) an Stelle von  $\lambda$  einzusetzen, um den Luftwiderstand zu eliminiren;

$$(20) \quad l = A - \frac{\lambda^2 T}{T^2}$$

ist als das wegen des Luftwiderstandes corrigirte, auf unendlich kleine Amplituden bezogene Decrement anzusehen.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wie genau die Beobachtungen durch die Formel (19) wiedergegeben werden, theile ich hier die Vergleichung zweier besonders ausführlicher Beobachtungsreihen mit der Berechnung mit.

Die erste Reihe bezieht sich auf Biegungsschwingungen eines Stäbchens von Phosphorbronze (Nr. 8), die sich durch besonders geringe Dämpfung auszeichnet. Das Intervall der Beobachtungen beträgt etwa 120 Schwingungen. Die beobachteten Werthe sind die Mittel aus drei Reihen; die Einheiten sind Millimeter:

beob.	21,64	19,28	17,21	15,37	13,75	12,30	21,00	9,84	8,85
ber.	21,71	19,31	17,21	15,36	13,73	12,28	11,00	9,86	8,84
beob.	7,92	7,12	6,39	5,72	5,16	4,63	4,16	3,72	3,36
ber.	7,93	7,12	6,39	5,73	5,15	4,62	4,15	3,73	3,35

Die Reihe ist berechnet mit den Zahlen:

$$A = 8,82 \cdot 10^{-4}, \quad A_1 = 0,20 \cdot 10^{-6}.$$

Das logarithmische Decrement nimmt in dieser Reihe von etwa  $9,8 \cdot 10^{-4}$  bis  $8,8 \cdot 10^{-4}$  ab; die Uebereinstimmung ist innerhalb der Grenze der directen Beobachtungsfehler eine vollkommene.

Eine zweite Reihe bezieht sich auf die Biegungsschwingungen eines Stäbchens von Cadmium (Nr. 2), welche Substanz unter allen von mir beobachteten die grössten Dämpfungen

zeigte. Das Intervall zwischen zwei Messungen beträgt hier nur 10 Schwingungsdauern:

beob.	12,82	9,44	7,06	5,38	4,16	3,23	2,56	2,00	1,57
ber.	12,89	9,33	7,02	5,38	4,18	3,26	2,55	2,00	1,57.

$$A = 240 \cdot 10^{-4}, \quad A_1 = 67,0 \cdot 10^{-6}.$$

Trotzdem hier das logarithmische Decrement von  $340 \cdot 10^{-4}$  bis  $240 \cdot 10^{-4}$  abnimmt, ist die Uebereinstimmung noch sehr befriedigend.

### III. Beobachtungsergebnisse.

Das Ziel der Beobachtungen war festzustellen, welchen Antheil an der wahrnehmbaren Dämpfung der Schwingungen die innere Reibung, wie sie in I definirt ist, besitzt, und, wenn möglich, zu numerischen Bestimmungen der Dämpfungsconstanten zu gelangen, aus denen sich dann, wie oben gezeigt, die Reibungsmoduln und Reibungsconstanten berechnen lassen.

Zur Erreichung des ersten Zieles war es nöthig, die Bedingungen der Beobachtung, so weit es die benutzten Apparate gestatteten, zu verändern, und die so erhaltenen Resultate mit der Theorie der innern Reibung zu vergleichen. Fand sich Uebereinstimmung, so konnten dann auch die von der Theorie gewiesenen Folgerungen aus den erhaltenen Zahlen gezogen werden.

Das zu prüfende Resultat der Theorie ist die Formel (14), in welcher nach dem Vorstehenden  $\lambda$  durch das corrigirte und auf unendlich kleine Amplituden bezogene Decrement zu ersetzen ist, also die Beziehung:

$$\alpha = \frac{lT}{2\pi^2},$$

welche aussagt, dass das Product aus Decrement und Schwingungsdauer eine der beobachteten Substanz individuelle Constante ist.  $\lambda$  und  $T$  liessen sich aber ändern durch verschiedene Wahl der Dimensionen des schwingenden Prismas und des Trägheitsmomentes der an der Bewegung theilnehmenden Massen. In beiden Hinsichten ist die Prüfung vorgenommen worden.

Von den Dimensionen variierte ich besonders die Dicke, da dieselbe viel grösseren Einfluss auf  $T$  und  $\lambda$  hat, als Breite und Länge; erstere tritt nämlich in dritter Potenz auf, während



letztere linear vorkommen. Grenzwerte für die Dicke waren 0,8 mm und 1,5 mm; die Breite blieb nahezu gleich 6 mm, die Länge war meist nahe gleich 100 mm. Das Trägheitsmoment liess sich nur am Drillungsapparate durch Anbringung oder Beseitigung des oben beschriebenen Verstärkungsringes variiren.

Wenn die Resultate der Beobachtung mit der obigen Formel unvereinbar waren, musste nach einer andern Erklärung der Dämpfung der Schwingungen gesucht werden. Hier bot sich zunächst die zu diesem Zwecke schon mehrfach herangezogene elastische Nachwirkung, für welche zunächst Herr Boltzmann<sup>1)</sup> einen Ansatz aufgestellt hat. Aus demselben folgt unter bestimmten Hilfsannahmen, dass bei gedämpften Schwingungen das corrigirte logarithmische Decrement  $l$  selbst eine der Substanz individuelle Constante ist. Bei der grossen Abweichung dieses Resultates von dem der Theorie der inneren Reibung schien die Entscheidung von besonderem Interesse. Wo sie zu Gunsten der Boltzmann'schen Formeln ausfiel, durfte man dann hoffen, auch die Constanten jener Theorie für gewisse Substanzen zu bestimmen und speciell die Frage zu entscheiden, ob, wie Herr Boltzmann vermuthet, die räumliche Dilatation von elastischer Nachwirkung nicht begleitet ist.

Die zahlreichsten Beobachtungen sind an Phosphorbronze angestellt, weil ich das Material für besonders dicht und zuverlässig hielt, allerdings nicht mit vollem Rechte, da Gussporen doch nicht ganz fehlten. Ich gebe von ihnen, ebenso wie von den auf andere Substanzen bezüglichen, nur die Endresultate, indem ich bezüglich aller Einzelheiten auf die Originalarbeit verweise.

Biegung.		Bronze.			
Nr. 1.	$T = 0,707$ ,	$l_\beta = 10,13 \cdot 10^{-4}$ ,	$\alpha_\beta = 36,3 \cdot 10^{-6}$		
„ 2.	$= 0,714$ ,	$= 10,13$	„ „	$= 36,6$	„
„ 3.	$= 0,718$ ,	$= 10,76$	„ „	$= 39,4$	„
„ 4.	$= 0,720$ ,	$= 9,23$	„ „	$= 33,7$	„
„ 5.	$= 0,537$ ,	$= 14,21$	„ „	$= 38,6$	„
„ 6.	$= 0,556$ ,	$= 14,09$	„ „	$= 39,7$	„
„ 7.	$= 1,010$ ,	$= 6,13$	„ „	$= 31,7$	„

1) L. Boltzmann, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 636. 1876.

Nr. 8.	$T = 1,030,$	$l_\beta = 6,45 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 33,6 \cdot 10^{-6}$
„ 9.	$= 1,045,$	$= 7,91$	„ „ $= 40,8$ „
„ 10.	$= 1,0185,$	$= 6,50$	„ „ $= 34,4$ „
„ 11.	$= 0,529,$	$= 14,55$	„ „ $= 39,0$ „
„ 12.	$= 0,525,$	$= 14,75$	„ „ $= 39,2$ „
„ 13.	$= 0,824,$	$= 7,46$	„ „ $= 31,2$ „
„ 14.	$= 0,843,$	$= 8,78$	„ „ $= 37,5$ „
„ 15.	$= 0,866,$	$= 8,83$	„ „ $= 38,0$ „

Zu diesen Zahlen ist Folgendes zu bemerken. Die Stäbchen Nr. 1)–8) sind zuerst hergestellt und beobachtet. Die Resultate für  $\alpha_\beta$  zeigen eine Abnahme von  $\alpha_\beta$  mit wechselnder Schwingungsdauer d. h. mit abnehmender Dicke. Ich vermuthete, dass hier die oben erwähnte als Folge der Bearbeitung auftretende Oberflächenschicht eine Rolle spielte, und liess zunächst 2) und 3) von 1 mm Dicke auf 0,8 mm mit aller Vorsicht abfeilen, um diese Schicht vielleicht zu beseitigen; diese Stäbchen sind als Nr. 9) und 10) aufgeführt. Schliesslich sind 11) und 12) neu in 1,25 mm Dicke hergestellt, darnach auf 0,9 mm abgefeilt und geschliffen und in diesem Zustande als 14) und 15) bezeichnet. Man erkennt, dass mit gesteigerter Vorsicht bei der Bearbeitung der Einfluss der Dicke auf  $\alpha_\beta$  immer mehr verschwindet. Um zu untersuchen, in wie weit die *Länge* der Stäbchen auf  $\alpha_\beta$  influirt, kürzte ich das besonders werthlose Stäbchen 7) auf  $\frac{2}{3}$  seiner Länge und bezeichnete es so mit 13); das in diesem Zustande gefundene  $\alpha_\beta$  stimmt vollständig mit dem früheren.

Bezüglich der *Biegungsschwingungen* scheinen sonach die Beobachtungen in Bronze in Uebereinstimmung mit der Theorie der innern Reibung zu stehen, und man kann das Mittel der oben erhaltenen Zahlen mit Ausschluss von Nr. 7) und 13) nämlich

$$\alpha_\beta = 37,5 \cdot 10^{-6}$$

als einen ungefähren Werth der ersten Dämpfungsconstante für Bronze ansehen.

Natürlich können die Beobachtungen nun nicht mit der Boltzmann'schen Formel stimmen; es entspricht sich im Mittel (unter Ausschluss von Nr. 7 und 13)

$$T = 0,537 \quad 0,715 \quad 0,880 \quad 1,023$$

$$l_\beta \cdot 10^4 = 14,40 \quad 10,06 \quad 8,54 \quad 6,71$$

$l_\beta$  nimmt also sehr stark mit wachsendem  $T$  ab.

Drillung.

Bronze.

Nr. 1.	$T = 0,398$	$l_\gamma = 3,22 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_\gamma = 6,48 \cdot 10^{-6}$
„ 2.	$= 0,411$	$= 2,95$	„ „ $= 6,13$ „
„ 3.	$= 0,408$	$= 3,05$	„ „ $= 6,31$ „
„ 4.	$= 0,405$	$= 3,12$	„ „ $= 6,41$ „
„ 5.	$= 0,307$	$= 4,18$	„ „ $= 6,19$ „
„ 6.	$= 0,319$	$= 3,98$	„ „ $= 6,13$ „
„ 11.	$= 0,306$	$= 3,99$	„ „ $= 6,18$ „
„ 12.	$= 0,304$	$= 4,02$	„ „ $= 6,18$ „

Wegen der Schwierigkeit, reine Drillungsschwingungen hervorzubringen sind die Stäbchen, deren Dicke kleiner als 1 mm war, diesen Beobachtungen gar nicht unterworfen worden. Um die Schwingungsdauer in weiteren Grenzen zu verändern, wurde bei den folgenden Beobachtungen der Verstärkungsring vom Drillungsapparat entfernt.

Nr. 1.	$T = 0,330$	$l_\gamma = 3,50 \cdot 10^{-4}$	$\alpha_\gamma = 5,86 \cdot 10^{-6}$
„ 5.	$= 0,260$	$= 4,30$	„ „ $= 5,63$ „
„ 6.	$= 0,264$	$= 4,36$	„ „ $= 5,83$ „

Im Mittel entsprechen einander

$$T = 0,405 \quad 0,312 \quad 0,262$$

$$l_\gamma \cdot 10^{+4} = 3,08 \quad 3,92 \quad 4,33$$

$$\alpha_\gamma \text{ „} = 6,33 \quad 6,16 \quad 5,73$$

Es ist also zwar jedenfalls  $l_\gamma$  stark von  $T$  abhängig, aber auch  $\alpha_\gamma$  ändert sich mit  $T$ ; die einfachen Formeln der inneren Reibung stellen daher die Erscheinung nicht befriedigend dar.

Fasst man sie als eine Superposition von innerer Reibung und elastischer Nachwirkung auf, so gelangt man zu der Formel

$$(21) \quad \alpha = \frac{r^0 T}{2 \pi^2} + \alpha^0$$

worin  $r^0$  den Antheil bezeichnet, den die elastische Nachwirkung zu dem logarithmischen Decrement liefert und  $\alpha^0$  die von dem Einfluss der Nachwirkung befreite Dämpfungsconstante ist.

Man findet aus Obigem für Bronze

$$\alpha_\gamma^0 = 4,70 \cdot 10^{-6}, \quad l_\gamma^0 = 0,829 \cdot 10^{-4}.$$

Diese Zahlen sind naturgemäss als mit Hilfe einer Hypothese berechnet, wenig sicher.

Biegung.

Messing.

Nr. 1.	$T = 0,726,$	$l_\beta = 6,74 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 26,7 \cdot 10^{-6}$
„ 2.	$T = 0,721,$	$l_\beta = 7,16 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 26,1 \cdot 10^{-6}$
„ 3.	$T = 0,751,$	$l_\beta = 6,44 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 24,5 \cdot 10^{-6}$
„ 4.	$T = 0,732,$	$l_\beta = 6,62 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 24,6 \cdot 10^{-6}$
„ 5.	$T = 0,822,$	$l_\beta = 5,65 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 23,5 \cdot 10^{-6}$
„ 6.	$T = 0,844,$	$l_\beta = 5,91 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 25,3 \cdot 10^{-6}$
„ 7.	$T = 0,578,$	$l_\beta = 8,43 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 24,7 \cdot 10^{-6}$
„ 8.	$T = 0,592,$	$l_\beta = 7,13 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\beta = 21,4 \cdot 10^{-6}$

Im Mittel entspricht sich

$$\begin{array}{lll} T = & 0,833 & 0,732 & 0,585 \\ l_\beta \cdot 10^{+4} = & 5,78 & 6,74 & 7,78 \\ \alpha_\beta \cdot 10^{+6} = & 24,4 & 25,0 & 23,0 \end{array}$$

$l_\beta$  wächst stark, während  $\alpha_\beta$  mehr constant ist;

$$\alpha_\beta = 23,8 \cdot 10^{-6}$$

kann als die erste Dämpfungsconstante für Messing angesehen werden.

Drillung.

Messing.

Nr. 1.	$T = 0,438,$	$l_\gamma = 3,09 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 6,85 \cdot 10^{-6}$
„ 5.	$T = 0,441,$	$l_\gamma = 3,11 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 6,94 \cdot 10^{-6}$
„ 7.	$T = 0,305,$	$l_\gamma = 3,47 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 5,36 \cdot 10^{-6}$
„ 8.	$T = 0,318,$	$l_\gamma = 3,33 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 5,36 \cdot 10^{-6}$

Ferner ohne Verstärkungsring

Nr. 7.	$T = 0,253,$	$l_\gamma = 3,75 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 4,81 \cdot 10^{-6}$
„ 8.	$T = 0,265,$	$l_\gamma = 3,79 \cdot 10^{-4},$	$\alpha_\gamma = 5,07 \cdot 10^{-6} (?)$

Unter Ausschluss der letzten verdächtigen Reihe findet sich im Mittel

$$\begin{array}{lll} T = & 0,440 & 0,311 & 0,253 \\ l_\gamma \cdot 10^{+4} = & 3,10 & 3,40 & 3,71 \\ \alpha_\gamma \cdot 10^{-6} = & 6,89 & 5,36 & 4,81 \end{array}$$

Das Verhalten ist ähnlich, wie bei Bronze. Nach Formel (21) berechnet liefern diese Zahlen

$$\alpha_{\gamma}^0 = 1,97 \cdot 10^{-6}, \quad l_{\gamma}^0 = 2,195 \cdot 10^{-4}.$$

Biegung.

Kupfer.

- Nr. 1.  $T = 0,711, \quad l_{\beta} = 7,44 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 26,8 \cdot 10^{-6}$   
 „ 2.  $T = 0,709, \quad l_{\beta} = 7,54 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 27,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,708, \quad l_{\beta} = 7,58 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 27,2 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,734, \quad l_{\beta} = 6,06 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 22,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,532, \quad l_{\beta} = 10,39 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 28,0 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,517, \quad l_{\beta} = 9,99 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 26,2 \cdot 10^{-6}$

Das Stäbchen Nr. 4 ist vielleicht bei der Bearbeitung zufällig etwas stärker in Anspruch genommen worden, als die übrigen, und zeigt daher eine zu kleine Dämpfung; im Uebrigen ist  $\alpha_{\beta}$  so nahe constant, dass das Mittel aus allen Zahlen

$$\alpha_{\beta} = 26,2 \cdot 10^{-6}$$

als ein nahe richtiger Werth gelten kann.

Drilling.

Kupfer.

- Nr. 1.  $T = 0,381, \quad l_{\gamma} = 4,19 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 8,09 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,373, \quad l_{\gamma} = 4,21 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 7,95 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,390, \quad l_{\gamma} = 4,20 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 8,31 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,274, \quad l_{\gamma} = 6,27 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 8,25 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,268, \quad l_{\gamma} = 6,46 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 8,77 \cdot 10^{-6}$

Ohne Verstärkungsring

- Nr. 6.  $T = 0,225, \quad l_{\gamma} = 7,18 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\gamma} = 8,11 \cdot 10^{-6}.$

Hier ist auch  $\alpha_{\gamma}$  nahe von der Schwingungsdauer unabhängig; das Mittel gibt

$$\alpha_{\gamma} = 8,18 \cdot 10^{-6}.$$

$l_{\gamma}$  variirt bei Biegung und Drilling sehr stark mit  $T$ .

Biegung.

Nickel.

- Nr. 1.  $T = 0,553, \quad l_{\beta} = 17,1 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 48,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 2.  $T = 0,548, \quad l_{\beta} = 17,9 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 49,7 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,551, \quad l_{\beta} = 18,8 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 52,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,540, \quad l_{\beta} = 17,0 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 46,5 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,375, \quad l_{\beta} = 27,1 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 51,5 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,376, \quad l_{\beta} = 26,2 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_{\beta} = 49,9 \cdot 10^{-6}$

$\alpha_\beta$  zeigt sich nahe constant; im Mittel ist <sup>1)</sup>

$$\alpha_\beta = 49 \cdot 7 \cdot 10^{-6}.$$

Drillung.

Nickel.

Nr. 1.  $T = 0,310$ ,  $l_\gamma = 10,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,9 \cdot 10^{-6}$

„ 2.  $T = 0,308$ ,  $l_\gamma = 11,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 18,4 \cdot 10^{-6}$

„ 3.  $T = 0,310$ ,  $l_\gamma = 11,3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 17,8 \cdot 10^{-6}$

„ 4.  $T = 0,306$ ,  $l_\gamma = 9,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 14,9 \cdot 10^{-6}$

„ 5.  $T = 0,214$ ,  $l_\gamma = 14,4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,6 \cdot 10^{-6}$

„ 6.  $T = 0,217$ ,  $l_\gamma = 13,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,2 \cdot 10^{-6}$

Ohne Verstärkungsring:

Nr. 5.  $T = 0,178$ ,  $l_\gamma = 16,6 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,0 \cdot 10^{-6}$

„ 6.  $T = 0,179$ ,  $l_\gamma = 18,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6}$

Der Verlauf von  $\alpha_\gamma$  zeigt keine regelmässige Zu- oder Abnahme mit  $T$ ; das Mittel

$$\alpha_\gamma = 16,3 \cdot 10^{-6}$$

wird daher der angenäherte richtige Werth der zweiten Dämpfungsconstante sein.

*Kupfer und Nickel scheinen nach dieser Zusammenstellung den einfachen Gesetzen der inneren Reibung nahezu zu folgen.*

Man kann daher aus den für sie gefundenen Dämpfungsconstanten  $\alpha_\beta$  und  $\alpha_\gamma$  die Reibungsmoduln und Reibungsconstanten wirklich berechnen. Hierzu sind die Elasticitätsmoduln dieser Substanzen nöthig; eigens zu ihrer Bestimmung angestellte Beobachtungen haben in absolutem Maasse ergeben:

für Kupfer:

$$s = 0,934 \cdot 10^{-12}, s_2 = 2,195 \cdot 10^{-12}, s_1 = -0,163 \cdot 10^{-12},$$

für Nickel

$$s = 0,499 \cdot 10^{-12}, s_2 = 1,300 \cdot 10^{-12}, s_1 = -0,151 \cdot 10^{-12}.$$

Nun folgt durch Combination von (16) und (17)

$$\alpha_\beta = \frac{n}{s} = \frac{2a_2}{s} (s^2 + 2s_1^2) + \frac{a_1}{s} (s + 2s_1)^2,$$

$$\alpha_\gamma = \frac{n_2}{s_2} = a_2 s_2$$

und hieraus lässt sich leicht berechnen:

1) In der Originalabhandlung steht durch ein Versehen 59,4.

für Kupfer:

$$n = 24,3 \cdot 10^{-18}, \quad n_2 = 17,9 \cdot 10^{-18} \text{ also } n_1 = 15,3 \cdot 10^{-18}.$$

$$a_1 = 47,3 \cdot 10^6, \quad a_2 = 3,73 \cdot 10^6, \quad \text{also } a = 54,8 \cdot 10^6;$$

für Nickel<sup>1)</sup>:

$$n = 24,8 \cdot 10^{-18}, \quad n_2 = 21,2 \cdot 10^{-18} \text{ also } n_1 = 14,2 \cdot 10^{-18},$$

$$a_1 = 448 \cdot 10^6, \quad a_2 = 12,5 \cdot 10^6, \quad \text{also } a = 473 \cdot 10^6.$$

Die Constanten  $a$  und  $a_1$ , welche nach (1) und (15) in den Ausdrücken für die *normalen* Druckcomponenten auftreten, erweisen sich als viel grösser wie  $a_2$ , mit welchem die Werthe der tangentialen Componenten proportional sind.

Was die absoluten Werthe angeht, so bestimmen die Beobachtungen über innere Reibung in tropfbaren Flüssigkeiten nur die Constante  $a_2$ , da wegen der Incompressibilität die normalen Componenten zum Theil unwirksam werden. Diese Constante findet sich bei Wasser in denselben absoluten Einheiten gleich 0,012; der für Kupfer und Nickel gefundene Werth von  $a_2$  und noch mehr von  $a$  und  $a_1$  ist also enorm viel grösser.

Die vier Metalle Bronze, Messing, Kupfer, Nickel nehmen eine Ausnahmestellung ein, indem sie entweder für Biegung und Drilling, oder wenigstens für Biegung allein den einfachen Gesetzen der inneren Reibung nahezu folgen. Die übrigen von mir untersuchten von grösserer, zum Theil sehr grosser Dämpfung weichen in ihrem Verhalten sämmtlich mehr oder weniger hiervon ab; bei einigen ist nicht die Dämpfungsconstante  $a$  sondern das corrigirte logarithmische Decrement  $l$  von der Schwingungsdauer nahezu unabhängig, wie dies die Boltzmann'sche Theorie der elastischen Nachwirkung verlangt, bei anderen wächst  $l$  und  $a$  mit wachsender Schwingungsdauer, sodass die Erscheinung auch nicht durch Zusammenwirkung von Reibung und Nachwirkung erklärt werden kann. Für diese habe ich die Dämpfungsconstante unten gar nicht mitgetheilt, da sie keine Bedeutung besitzt.

1) Diese Werthe sind gegenüber den in der Originalabhandlung gegebenen zum Theil berichtigt.



## Biegung.

## Gussstahl.

- Nr. 1.  $T = 0,722$ ,  $l_\beta = 21,0 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 76,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 2.  $T = 0,721$ ,  $l_\beta = 21,4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 76,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,724$ ,  $l_\beta = 21,2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 77,8 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,713$ ,  $l_\beta = 21,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 77,7 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,508$ ,  $l_\beta = 24,0 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 61,7 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,518$ ,  $l_\beta = 23,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 62,4 \cdot 10^{-6}$

Im Mittel entspricht sich

$$\begin{array}{rcl} T & = & 0,513 \quad 0,720 \\ l_\beta \cdot 10^{+4} & = & 23,9 \quad 21,3 \\ \alpha_\beta \cdot 10^{+6} & = & 62,0 \quad 77,0 \end{array}$$

## Drillung.

- Nr. 1.  $T = 0,397$ ,  $l_\gamma = 20,61 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 41,4 \cdot 10^{-6}$   
 „ 2.  $T = 0,402$ ,  $l_\gamma = 20,37 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 41,5 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,292$ ,  $l_\gamma = 19,33 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 28,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,235$ ,  $l_\gamma = 18,11 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 21,6 \cdot 10^{-6}$

Letzteres ohne Verstärkungsring. Im Mittel:

$$\begin{array}{rcl} T & = & 0,235 \quad 0,292 \quad 0,400 \\ l_\gamma \cdot 10^{+4} & = & 21,6 \quad 28,6 \quad 41,4 \\ \alpha_\gamma \cdot 10^{+6} & = & 18,11 \quad 19,33 \quad 20,49 \end{array}$$

## Biegung.

## Aluminium.

- Nr. 2.  $T = 0,934$ ,  $l_\beta = 8,44 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 39,9 \cdot 10^{-6}$   
 „ 3.  $T = 0,956$ ,  $l_\beta = 7,96 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 38,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,684$ ,  $l_\beta = 7,24 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 25,1 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,684$ ,  $l_\beta = 7,42 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\beta = 25,7 \cdot 10^{-6}$

Im Mittel

$$\begin{array}{rcl} T & = & 0,684 \quad 0,945 \\ l_\beta \cdot 10^{+4} & = & 7,33 \quad 8,20 \\ \alpha_\beta \cdot 10^{+6} & = & 25,4 \quad 39,3. \end{array}$$

## Drillung.

- Nr. 2.  $T = 0,520$ ,  $l_\gamma = 6,39 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 16,8 \cdot 10^{-6}$   
 „ 4.  $T = 0,542$ ,  $l_\gamma = 5,66 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 15,6 \cdot 10^{-6}$   
 „ 5.  $T = 0,387$ ,  $l_\gamma = 6,00 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 11,75 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,387$ ,  $l_\gamma = 6,49 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 12,72 \cdot 10^{-6}$

Ferner ohne Verstärkungsring:

- Nr. 5.  $T = 0,321$ ,  $l_\gamma = 6,00 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 9,76 \cdot 10^{-6}$   
 „ 6.  $T = 0,320$ ,  $l_\gamma = 6,44 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_\gamma = 10,43 \cdot 10^{-6}$

Im Mittel:

$$T = 0,320 \quad 0,387 \quad 0,521$$

$$l_y \cdot 10^{+4} = 6,22 \quad 6,25 \quad 6,03$$

$$\alpha_y \cdot 10^{+6} = 10,10 \quad 12,24 \quad 16,2.$$

$l_y$  ist hier anscheinend von  $T$  nahezu unabhängig.

Biegung.

Gusseisen.

Nr. 2.  $T = 0,661, l_\beta = 208 \cdot 10^{-4}$

„ 3.  $T = 0,641, l_\beta = 211 \cdot 10^{-4}$

„ 5.  $T = 0,480, l_\beta = 168 \cdot 10^{-4}$

„ 6.  $T = 0,483, l_\beta = 163 \cdot 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2.  $T = 0,363, l_y = 131 \cdot 10^{-4}$

„ 3.  $T = 0,355, l_y = 150 \cdot 10^{-4}$

„ 5.  $T = 0,269, l_y = 105 \cdot 10^{-4}$

„ 6.  $T = 0,269, l_y = 97 \cdot 10^{-4}$

Biegung.

Cadmium.

Nr. 1.  $T = 0,892, l_\beta = 252 \cdot 10^{-4}$

„ 2.  $T = 0,901, l_\beta = 238 \cdot 10^{-4}$

„ 3.  $T = 0,908, l_\beta = 257 \cdot 10^{-4}$

„ 4.  $T = 0,921, l_\beta = 249 \cdot 10^{-4}$

„ 5.  $T = 1,208, l_\beta = 259 \cdot 10^{-4}$

„ 6.  $T = 1,220, l_\beta = 262 \cdot 10^{-4}$

Drillung.

Nr. 2.  $T = 0,545, l_y = 308 \cdot 10^{-4}$

„ 6.  $T = 0,715, l_y = 311 \cdot 10^{-4}$

Hier scheint bei Biegung und Drillung  $l$  nahezu constant zu sein, wie dies die Boltzmann'sche Theorie der elastischen Nachwirkung fordert.

Dies sind die Metalle, bei denen ich den Einfluss der Dimensionen und dadurch der Schwingungsdauer auf die Werthe des logarithmischen Decrementes ausführlicher untersucht habe. Bei Zinn und Silber war es nicht möglich, befriedigend übereinstimmende Zahlen zu erhalten, wahrscheinlich weil diese Substanzen durch die Bearbeitung sehr stark beeinflusst werden. Hier, wie bei Magnesium, Zink und Wismuth will ich nur die logarithmischen Decremente angeben, die ich für Stäbe von beiläufig 1 mm Dicke, 6 mm Breite und

100 mm Länge erhalten habe und will diesen Zahlen, um eine Uebersicht eines Theiles meiner Resultate zu ermöglichen, diejenigen Werthe beifügen, die in den vorstehenden ausführlicheren Beobachtungstafeln sich auf Stäbe der gleichen Dimensionen beziehen. Ordnet man sie nach ihrer Grösse, so erhält man die folgenden Reihen, in welchen der Kürze halber *St*, *Bo* und *Me* für Gussstahl, Bronze und Messing gesetzt ist.

Logarithmische Decremente.

$l_{\beta} \cdot 10^4$		$l_{\gamma} \cdot 10^4$	
Me	6,74	Bo	3,08
Cu	7,15	Me	3,10
Al	8,20	Cu	4,20
Bo	10,06	Al	6,03
Ni	17,7	Ni	10,9
St	23,9	Ag	16,5(?)
Ag	38 (?)	St	19,3
Zn	60,5	Zn	58,1
Mg	69	Mg	65 (?)
Sn	129	Sn	110
Bi	160	Te	140
Te	210	Bi	150
Cd	252	Cd	308

Betont mag nochmals werden, dass die Zahlen an sehr wahrscheinlich isotropem Material, nämlich an Stäben, die aus gegossenen und im Uebrigen unbearbeiteten Blöcken geschnitten sind, erhalten wurden.

Die Resultate der vorstehend beschriebenen Beobachtungen sind etwa folgende.

Von den untersuchten Metallen befolgen innerhalb des Umfanges, in dem sich die Umstände variiren liessen, *Kupfer* und *Nickel* nahezu die Gesetze, welche im Eingang aus dem für die innere Reibung fester Körper gemachten Ansatz gefolgert sind. *Messing* und *Bronze* gehorchen ihnen bei Biegungsschwingungen, nicht aber bei Drillungsschwingungen; die Erscheinungen, welche sie bei letzteren zeigen, lassen sich als eine Superposition der Wirkung von innerer Reibung und elastischer Nachwirkung — letztere nach dem Boltzmann'schen Ansatz behandelt — auffassen. Cadmium liefert logarithmische Decremente, die nahezu von der Schwingungsdauer unabhängig sind und bietet demgemäss das Beispiel einer bei

Biegung und Drillung mit den Boltzmann'schen Formeln übereinstimmenden Substanz. Von den übrigen Metallen haben die meisten logarithmische Decremente ergeben, welche mit wachsender Schwingungsdauer selbst wachsen und demgemäss mit beiden Theorien unvereinbar sind.

Hieraus folgt, dass für die Beschreibung der Gesamtheit der beobachteten Erscheinungen man auch mit der Superposition der Wirkung von innerer Reibung und Nachwirkung nicht ausreicht, sondern man den allgemeineren Maxwell'schen Ansatz benutzen müssen wird, der die Druckcomponenten durch Reihen darstellt, die nach steigenden Differentialquotienten der Deformationsgrössen nach der Zeit fortschreiten. Dieselben stellen sich als eine Erweiterung der an die Spitze dieser Mittheilung gestellten Formeln (1) dar. Zu ihrer Anwendung schien indessen das vorliegende Beobachtungsmaterial nicht umfangreich genug.

Schliesslich sei noch auf eine merkwürdige Folgerung aus den gefundenen Zahlen hingewiesen. Gleichviel ob die betrachteten Substanzen den Gesetzen der inneren Reibung oder der elastischen Nachwirkung folgen, jederzeit ergibt sich aus ihnen, dass diejenigen Constanten, welche die normalen Druckcomponenten  $A_x$ ,  $B_y$ ,  $C_z$  messen, viel grösser sind als diejenigen, mit welchen die tangentialen  $B_x$ ,  $C_x$ ,  $A_y$  proportional sind. Daraus folgt aber unter anderem, dass bei allseitig gleicher Compression Reibung und Nachwirkung nicht nur nicht verschwindend, sondern umgekehrt äusserst gross sind. Es dürfte dieses Resultat gegen diejenigen Theorien sprechen, welche versuchen, diese Wirkungen aus einer Drehung der Moleküle der ponderablen Substanzen zu erklären; denn bei allseitig gleichem Drucke kann nach Symmetrie von einer Drehung der Moleküle nicht wohl die Rede sein.

Göttingen, Sept. 1892.

**X. Ueber die Messung der Diffusionscoefficienten  
von Flüssigkeiten; von F. Niemöller.**

In Folgendem soll über eine Methode berichtet werden, die eine genaue Messung der Diffusionscoefficienten chemischer Substanzen gestattet und, was die Zuverlässigkeit der durch sie gewonnenen Resultate anbetrifft, den bisher benutzten chemischen und optischen Methoden mindestens gleichwerthig sein dürfte.

Bei genauen Messungen der Diffusionscoefficienten wird man die Diffusion in Röhren mit engem Querschnitt stattfinden lassen, um die den Vorgang störenden hydrodynamischen Bewegungen, welche durch Erschütterungen oder Temperaturänderungen hervorgerufen werden, möglichst auszuschliessen. Auch muss aus demselben Grunde die Ausbreitung der Substanz der Richtung der Schwere entgegengesetzt erfolgen.

Um diese Bedingungen zu erfüllen, könnte man den Versuch in folgender Weise ausführen.

Eine oben geschlossene enge Glasröhre (Diffusionsröhre) wird mit destillirtem Wasser gefüllt und mit dem offenen Ende in ein grösseres Gefäss getaucht, welches eine Lösung der Substanz von bekannter Concentration enthält. Aus der chemisch bestimmten Menge der nach einiger Zeit in die Röhre eingedrungenen Substanz kann man dann, unter der Voraussetzung, dass die Concentration im Gefässe sich während des Vorganges nicht merklich ändert, den Diffusionscoefficienten berechnen. Eine nähere Ueberlegung zeigt jedoch, dass die Ausführung des Versuches in dieser Form genaue Resultate kaum liefern können. Zunächst gibt der Versuch keine Entscheidung über die Zulässigkeit der Voraussetzung, da er nicht den Diffusionsvorgang in seinem ganzen Verlaufe beobachten lässt. Ausserdem dringt beim Eintauchen in die Lösung eine gewisse Quantität der Substanz in die Röhre, wie man leicht erkennt, wenn man eine mit Wasser gefüllte Röhre mit der Oberfläche einer stark gefärbten Flüssigkeit in Berührung

bringt. Man bemerkt eine sofort eintretende Trübung des Wassers im unteren Theile der Röhre, die bei Röhren von mehr als 5 mm Durchmesser oft noch 6 mm oberhalb der Oeffnung erkennbar ist. Ueber die Menge dieser eingedrungenen Substanz lässt uns der Versuch völlig im Unklaren.

Ich habe deshalb versucht, den Diffusionscoefficienten aus der Aenderung des galvanischen Leitungswiderstandes der Flüssigkeitssäule in der Röhre zu berechnen. Freilich darf bei diesem Verfahren als Lösungsmittel der Substanz kein destillirtes Wasser genommen werden, denn dann müsste auch die Röhre mit destillirtem Wasser gefüllt werden und der Anfangswiderstand würde unmessbar gross sein. Man wird deshalb als Lösungsmittel der Substanz destillirtes Wasser nehmen, das durch Zusatz von solchen Säuren, welche die Substanz nicht zersetzen, oder solchen Salzen, welche mit der Substanz keine Wechselersetzung eingehen, leitend gemacht ist und mit dieser Flüssigkeit auch die Röhre füllen. Nach Ermittlung des Diffusionscoefficienten der Substanz für Lösungsmittel, die sich durch einen grösseren oder geringeren Procentgehalt desselben Zusatzes unterscheiden, wird man dann den Coefficienten für destillirtes Wasser leicht berechnen können. Bei meinen Versuchen, die nur den Zweck hatten, die Brauchbarkeit der Methode zu prüfen, habe ich mich auf die Untersuchung der Diffusionsgeschwindigkeit von Salmiak in 1 proc. Kochsalzlösung beschränkt.

Zunächst musste eine Formel für den Widerstand einer Mischung aufgestellt werden, die durch Auflösen von *eg* Salmiak in 100 g Kochsalzlösung erhalten wird. Zu dem Zwecke wurden ausser der 1 proc. Kochsalzlösung, die mit *A* bezeichnet werden möge, noch sechs andere Flüssigkeiten hergestellt, indem man zu je 100 g der Flüssigkeit *A* der Reihe nach  $\frac{1}{6}$  g,  $\frac{2}{6}$  g, ...  $\frac{6}{6}$  g Salmiak zusetzte. Von der letzten Flüssigkeit, *B*, wurde ein grösseres Quantum hergestellt. Nachdem sämmtliche Flüssigkeiten die Temperatur des Beobachtungsraumes angenommen hatten — es war dies ein gewölbter Keller, dessen Temperatur sich sehr langsam änderte — wurden mit der Telephonbrücke die Widerstände der Flüssigkeiten beobachtet. Als Vergleichswiderstand diente Zinkvitriol, dessen Temperatur bei jeder Messung beobachtet wurde. Setzt man den Widerstand der

Flüssigkeit  $A = 1$ , so lässt sich der Widerstand einer Mischung von  $eg$  Salmiak und 100 g der Flüssigkeit  $A$  berechnen aus

$$(1) \quad w = \frac{1 + 0,12222 e}{1 + 1,62 e}$$

Nachstehende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der beobachteten und berechneten Widerstände.

$eg$	$w$ beob.	$w$ beob.	Diff.
1	0,799	0,803	- 0,004
2	0,675	0,676	- 0,001
3	0,590	0,586	+ 0,004
4	0,523	0,520	+ 0,003
5	0,467	0,469	- 0,002
6	0,428	0,429	- 0,001

Die Formel für  $w$  gilt für eine Temperatur von  $9,5^\circ$ ; da sie das Verhältniss der Widerstände von zwei verdünnten Lösungen angibt und diese nach F. Kohlrausch mit zunehmender Temperatur nahezu gleichmässig abnehmen, so ist die Formel auch noch anwendbar für Temperaturen, die um einige Grade von  $9,5^\circ$  abweichen.

Mit Hülfe der Formel für  $w$  lässt sich nun leicht berechnen, wie gross der Widerstand  $W_t$  der Röhre  $t$  Stunden nach dem Eintauchen sein wird. Bedeutet  $e$  in der Formel (1) den Gehalt an Salmiak in der Entfernung von  $x$  mm von der unteren Oeffnung, so ist offenbar, wenn der Anfangswiderstand  $= 1$  und die Länge der Röhre  $= a$  gesetzt wird:

$$W_t = \frac{1}{a} \int_0^a w dx$$

Setzt man ferner voraus, dass die Concentration der die Röhre umgebenden Flüssigkeit während der Versuchsdauer constant bleibt, so findet man aus der bekannten Differentialgleichung für die Diffusion  $\kappa \partial^2 e / \partial x^2 = \partial e / \partial t$  für  $e$  die Reihe

$$e = 1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2a} \tau - \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2a} \tau^3 - \dots$$

in welcher zur Abkürzung gesetzt ist

$$(2) \quad \tau = e^{-\frac{\kappa \pi^2 t}{a^2}}$$



Das Integral ist richtig, denn für alle Werthe von  $t$  ist  $e = 1$ , wenn  $x = 0$  ist und die mit  $\partial e / \partial x$  proportionale Geschwindigkeit verschwindet am oberen geschlossenen Ende der Röhre. Ausserdem verschwindet die Reihe für alle Werthe von  $x$ , wenn  $t = 0$  ist, vermöge der bekannten Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2h}\right) + \dots$$

Substituirt man die Reihe für  $e$  in (1), so ergeben die Formeln von Gauss für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals

$$W_t = 0,7272 + 0,8290(\tau - 0,8) + 1,356(\tau - 0,8)^2 \\ + 2,425(\tau - 0,8)^3 + 4,533(\tau - 0,8)^4.$$

Diese Gleichung ist für Werthe von  $\tau$  zwischen 0,9 und 0,6 gültig. — Hat man durch einen Versuch das Verhältniss  $W_t$  des Widerstandes zum Anfangswiderstand ermittelt, so kann man aus obiger Gleichung  $\tau$  berechnen und aus (2) die Constante  $\alpha$ . Aus (2) folgt, dass  $\log \tau / t$  ein constanter Quotient sein muss.

Bei meinen ersten Versuchen benutzte ich eine Röhre von 44 mm Länge und 2 mm Durchmesser, in welche oben ein in einer Halbkugel endigender Platindraht eingeschmolzen war. Zunächst wurde die Röhre mit der Flüssigkeit  $A$  gefüllt und in ein mit derselben Flüssigkeit gefülltes Gefäss getaucht, in welcher sich auch die 6 qcm grosse Platinelectrode  $P$  befand. Man beobachtete zuerst den Widerstand  $W_0$  der Röhre, indem die Oeffnung gegen  $P$  gedrückt wurde, darauf den etwas grösseren Widerstand  $W_0 + \alpha$ , nachdem die Röhre soweit gehoben war, dass ihre Oeffnung sich 6 cm über  $P$  befand.  $\alpha$  ist der Widerstand, den der Strom auf dem Wege von  $P$  bis zum Eintritt in die Röhre erfährt. Tauchte man hierauf die Röhre in das mit der Flüssigkeit  $B$  gefüllte Gefäss so weit ein, dass die in derselben befindliche Electrode sich ebenfalls 6 cm unterhalb der Oeffnung befand, so musste jetzt der Widerstand  $W_0 + \beta$  beobachtet werden, wenn  $\beta$  den Widerstand bezeichnet, den der Strom in der besser leitenden Flüssigkeit  $B$  auf dem Wege von der Electrode bis zum Eintritt in die Röhre erfährt, und der nach obiger Tabelle  $= 0,428 \alpha$  ist. Der in der That beobachtete Widerstand war aber erheblich kleiner als  $W_0 + \beta$ ,

wodurch constatirt war, dass ein Theil der Salmiaklösung schon beim Eintauchen in die Röhre eingedrungen war. Um das Eindringen zu verhindern, benutzte ich ein Capillarrohr, welches in eine nach aufwärts gekrümmte feine Spitze ausgezogen war. Das Capillarrohr wurde ebenfalls mit der Flüssigkeit *A* gefüllt und seine Spitze wurde in die Röhre eingeführt. Nachdem man die Diffusionsröhre mit der eingeführten Spitze eingetaucht hatte, wurde die Spitze langsam aus der Röhre herausgezogen, während gleichzeitig einige Tropfen der Flüssigkeit aus der Spitze in die Röhre traten. Der nunmehr beobachtete Widerstand ergab in der That nach Abzug von  $\beta$  für den Röhrenwiderstand den Werth  $W_0$ . — Um den störenden Einfluss eines in der Leitung auftretenden Concentrationsstromes zu annulliren, wurde die Leitung unterbrochen, sobald eine Widerstandsmessung ausgeführt war.

Folgende Tabelle enthält die Werthe von  $-\log \tau/t$ , die beim ersten Versuche erhalten wurden. Zeiteinheit 1 Stunde.

$t =$	16,9	24,4	41,9	48,7	65,7	73,8
$-\frac{\log \tau}{t} =$	0,00247	0,00243	0,00229	0,00225	0,00224	0,00222

Der Quotient nimmt langsam ab, sodass sich daraus ein constanter Werth des Diffusionscoefficienten nicht berechnen lässt. Die Temperatur schwankte zwischen  $8,7^\circ$  und  $8,2^\circ$ . Dass diese Abnahme des Quotienten durch so geringe Temperaturschwankungen nicht verursacht sein konnte, zeigte eine zweimalige Wiederholung des Versuches, wobei die Temperatur nahezu constant blieb und der Quotient trotzdem dasselbe Verhalten zeigte.

Um die Ursache dieser Abnahme zu ermitteln, wählte ich eine sehr enge Diffusionsröhre mit eingeschmolzenem Platindraht. Das Resultat war noch ungünstiger. Hieraus geht hervor, dass der Strom beim Uebergange aus der Flüssigkeit in eine kleine Electrode einen Widerstand überwinden muss, der mit der Zeit zunimmt. Aus diesem Grunde musste ich Versuche mit engen Röhren in dieser einfachen Form aufgeben. Aber auch eine weite Röhre von 6 mm Durchmesser und 60 mm Länge gab keine besseren Resultate. Der Quotient sank nach 96 Stunden auf die Hälfte des zuerst beobachteten Werthes. Da der Flächeninhalt des Electroden 28 qmm be-

trug, so konnte der Uebergangswiderstand nicht die Ursache der Abnahme sein. Der Versuch zeigt vielmehr klar, dass die Voraussetzung, dass die Flüssigkeit im Gefässe während des Versuches in der Nähe der Röhrenmündung eine constante Concentration behalte, nicht ganz zutreffend ist.

Um zunächst eine während der ganzen Versuchsdauer gleichbleibende Concentration zu erzielen, wurde für eine allmähliche Erneuerung der Flüssigkeit im Gefässe Sorge getragen und zwar durch Anwendung eines Tropftrichters. Das Trichterrohr wurde vermittels eines kurzen Kautschukschlauches mit einem Glasrohre verbunden, in welchem sich ein kurzer Pfropfen aus Fliesspapier befand. Durch diese Vorrichtung erzielt man ein langsames ununterbrochenes Ausfliessen aus dem Trichter. Die untere Oeffnung reichte bis auf den Boden des Gefässes. Die aus dem Trichter austretende Flüssigkeit (6 ccm pro Stunde) bewirkte ein Steigen des Flüssigkeitsniveaus in diesem Gefässe um 2 cm in 24 Stunden.

Da durch dieses Verfahren eine freilich sehr geringe Bewegung im Gefässe erzeugt wird und diese die Diffusion in weiten Röhren beeinflussen könnte, so benutzte ich bei meinen folgenden Versuchen eine enge Röhre (Durchmesser  $2r = 1.04$  mm), die sich oben konisch erweiterte. In der Erweiterung (vgl. Fig. 1) war eine kreisförmige Platin-electrode von 11,9 qmm Fläche eingekittet.



Fig. 1.

Es soll zunächst eine Formel entwickelt werden für die Concentrationen  $e$  und  $\bar{e}$  zur Zeit  $t$  in der Röhre und der Erweiterung. Bezeichnet  $\xi$  die Entfernung des Querschnittes  $q$  der Erweiterung vom Querschnitte  $\beta$ ,  $b$  die Länge der Axe der Erweiterung,  $a$  die Länge der Röhre, so gelten folgende Gleichungen:

$$(3) \quad x \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \frac{\partial e}{\partial t},$$

$$(4) \quad x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( q \frac{\partial \bar{e}}{\partial \xi} \right) = q \frac{\partial \bar{e}}{\partial t},$$

$$(5) \quad e_{(x=0)} = 1,$$

$$(6) \quad e_{(x=a)} = \bar{e}_{(\xi=0)},$$

$$(7) \quad \frac{\partial e}{\partial x}_{(x=a)} = \frac{\partial \bar{e}}{\partial \xi}_{(\xi=0)},$$

$$(8) \quad \frac{\partial \bar{e}}{\partial \xi}_{(\xi=b)} = 0.$$

Die letzten vier Bedingungen müssen für alle Werthe von  $t$  erfüllt sein. Den Bedingungen (3) und (5) genügt die Reihe

$$(9) \quad e = 1 + c_1 \sin(\alpha_1 x) e^{-\alpha_1^2 \kappa t} + c_2 \sin(\alpha_2 x) e^{-\alpha_2^2 \kappa t} + \dots$$

Der Querschnitt  $q$  der Erweiterung lässt sich mit grosser Annäherung durch  $\xi$  ausdrücken vermittels der Formel  $q = r^2 \pi e^{2\beta \xi}$ . Die Gleichung (4) geht dann über in

$$2\beta \kappa \frac{\partial \bar{e}}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \bar{e}}{\partial t}.$$

Ein particuläres Integral dieser Gleichung ist

$$e^{-\beta \xi} \left( A_k e^{\xi \sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2}} + B_k e^{-\xi \sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2}} \right) e^{-\alpha_k^2 \kappa t}.$$

Setzt man  $\sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2} = w_k$  und beschränkt sich auf Werthe von  $\alpha_k$ , welche kleiner als  $\beta$  sind, so ist  $w_k$  reell und man erhält

$$e = e^{-\beta \xi} \left( A_0 e^{w_0 \xi} + B_0 e^{-w_0 \xi} \right) e^{-\alpha_0^2 \kappa t} + e^{-\beta \xi} \left( A_1 e^{w_1 \xi} + B_1 e^{-w_1 \xi} \right) e^{-\alpha_1^2 \kappa t} + \dots$$

Aus den Bedingungen (6) und (7) folgt sofort, dass  $\alpha_0 = 0$ ,  $B_0 = 0$  und  $A_0 = 1$  ist. Obige Reihe geht demnach über in

$$(10) \quad e = 1 + e^{-\beta \xi} \left( A_1 e^{w_1 \xi} + B_1 e^{-w_1 \xi} \right) e^{-\alpha_1^2 \kappa t} + \dots$$

Aus den Bedingungen (6), (7) und (8) ergeben sich ferner die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} A_k + B_k = C_k \sin(\alpha_k a) \\ A_k(-\beta + w_k) - B_k(\beta + w_k) = \alpha_k c_k \cos(\alpha_k a) \\ A_k(-\beta + w_k) - B_k(\beta + w_k) e^{-2\beta w_k} = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von  $A_k$ ,  $B_k$  und  $C_k$  aus diesen Gleichungen liefert für  $\alpha_k$  die Gleichung

$$(12) \quad \alpha_k \operatorname{tg}(\alpha_k a) + \frac{\alpha_k^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2}} = \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2}}{2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha_k^2} - 1}.$$

Wenn aus dieser Gleichung die Grössen  $\alpha_1, \alpha_2 \dots$  berechnet sind, findet man

$$(13) \quad B_k = - \frac{\alpha_k c_k \cos(\alpha_k a)}{(\beta + w_k)(1 - e^{-2bw_k})}$$

und

$$A_k = \frac{\alpha_k c_k \cos(\alpha_k a) e^{-2bw_k}}{(\beta - w_k)(1 - e^{-2bw_k})}.$$

Es sind demnach nur noch die Coefficienten  $c_k$  unbekannt, welche dadurch bestimmt werden, dass, wenn  $t = 0$  ist, die Functionen  $e$  und  $\bar{e}$  für alle Werthe von  $x$  und  $\xi$  verschwinden müssen. Für  $t = 0$  gehen demnach die Reihen (9) und (10) über in die beiden folgenden:

$$(14) \quad -1 = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

$$(15) \quad -e^{\beta\xi} = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \dots$$

In der ersten Gleichung ist  $f_k(x) = c_k \sin(\alpha_k x)$ , in der zweiten  $\varphi_k(\xi) = A_k e^{w_k \xi} + B_k e^{-w_k \xi}$ . Berücksichtigt man, dass  $f_k'' = -\alpha_k^2 f_k$  und  $\varphi_k'' = w_k^2 \varphi_k$ , so kann man leicht beweisen, dass, falls  $\lambda \leq \mu$ ,

$$(16) \quad \int_0^a f_\lambda f_\mu dx + \int_0^b \varphi_\lambda \varphi_\mu d\xi = 0$$

ist. Der Beweis ergibt sich aus den bekannten Beziehungen:

$$\int_a^b f_\lambda f_\mu dx = \frac{(f_\lambda f_\mu' - f_\mu' f_\lambda)_a}{\alpha_\lambda^2 - \alpha_\mu^2}$$

$$\int_0^b \varphi_\lambda \varphi_\mu d\xi = \frac{(\varphi_\lambda \varphi_\mu' - \varphi_\mu' \varphi_\lambda)_0}{-w_\lambda^2 + w_\mu^2}.$$

Da die Nenner gleich sind, so folgt aus den Bedingungen (6), (7) und (8) die Richtigkeit der Gleichung (16). Multipliciren wir demnach (14) beiderseits mit  $f_\lambda dx$  und (15) mit  $\varphi_\lambda d\xi$ , integriren die erste Gleichung von 0 bis  $a$ , die zweite von 0 bis  $b$  und addiren, so ist

$$-c_\lambda \int_0^a \sin(\alpha_\lambda x) dx - \int_0^b e^{\beta\xi} \varphi_\lambda(\xi) d\xi = c_\lambda^2 \int_0^a \sin^2(\alpha_\lambda x) dx + \int_0^b \varphi_\lambda^2(\xi) d\xi.$$

Mit Rücksicht auf die aus den Differentialgleichungen sich ergebenden Rechenvortheile findet man für die linke Seite den

Werth  $-c_k/a_k$ . Setzt man ferner die Werthe für  $A_k$  und  $B_k$  aus (13) in  $\varphi_k = A_k e^{w_k \varepsilon} + B_k e^{-w_k \varepsilon}$  ein und berechnet die rechte Seite, so findet man schliesslich

$$(17) \quad c_k = - \frac{2}{\alpha_k a - \frac{1}{2} \sin(2 \alpha_k a) + \frac{(\beta + w_k)^2 \cos^2(\alpha_k a) \varepsilon_k}{\alpha_k (e^{2b w_k} - 1)^2}}$$

wenn

$$\varepsilon_k = \frac{e^{2b w_k} - 1}{w_k} \left( 1 + \left( \frac{\beta - w_k}{\beta + w_k} \right)^2 e^{2b w_k} \right) - 4b \left( \frac{\beta - w_k}{\beta + w_k} \right) e^{2b w_k}.$$

Durch die Gleichungen (12), (13) und (17) sind sämtliche in den Reihen (9) und (10) vorkommenden Grössen bestimmt, folglich lässt sich auch der Widerstand der Röhre zur Zeit  $t$  numerisch bestimmen.

Die Constanten der benutzten Röhre waren  $a = 28,3$  mm,  $b = 6,9$  mm,  $\beta = 0,1929$ . Aus (12) findet man dann die beiden kleinsten Wurzeln  $\alpha_1 = 0,02765$ ,  $\alpha_2 = 0,1124$ . Aus (17) und (13) findet man  $c_1 = -1,393$ ,  $c_2 = 0,4902$ ,  $A_1 = 1,0605$ ,  $B_1 = -0,07669$ .

Als Lösungsmittel des Salmiaks wurde für die folgenden Versuche eine Kochsalzlösung vom Procentgehalt 1,2 benutzt. Für dieses neue Lösungsmittel ergaben die bei  $14,1^\circ$  angestellten Beobachtungen statt (1) die Formel

$$(18) \quad w = \frac{1 + 0,1428 e}{1 + 1,3968 e}.$$

Folgende Tabelle, in welcher  $e^{-\alpha_k^2 x t} = \tau$  gesetzt ist, gibt die für einige Werthe von  $\tau$  berechneten Widerstände der Röhre mit Einschluss der Erweiterung:

$r =$	1	0,9	0,85	0,80	0,75
$W_t =$	1	0,689	0,650	0,631	0,613

Aus den Zahlen der Tabelle leitet man leicht die Formel ab

$$(19) \quad W_t = \frac{1 + 11,674 (1-r)}{1 + 21,5 (1-r)}$$

Die beobachteten Widerstände zur Zeit  $t$  sind in nachstehender Tabelle wiedergegeben:

$t =$	18,3	22,5	25,1	29,0	45,7	49,4
$W_t =$	0,7231	0,7055	0,6969	0,6887	0,6489	0,6414
$r =$	0,9286	0,9157	0,9085	0,9007	0,8458	0,8305
$-\frac{\log r}{t} =$	0,00175	0,00169	0,00165	0,00156	0,00159	0,00163

Die in der dritten und vierten Horizontalreihe angegebenen Werthe für  $\tau$  und  $-\log \tau/t$  sind mit Hülfe der Formel (19) aus den beobachteten Widerständen berechnet. Aus dem Mittelwerthe 0,00165 für  $-\log \tau/t$  findet man für  $k$  die Zahl 4,97 (mm<sup>2</sup>/Stunde). Der Werth gilt für eine Temperatur von 14,3°, da die Temperatur während des Versuches von 14,0° auf 14,6° stieg.

Obschon die Zahlen in der letzten Horizontalreihe hinreichend übereinstimmen, so veranlassten mich doch mehrere Gründe, die Form der Diffusionsröhren noch mehr abzuändern. Erstens hält es schwer, Röhren herzustellen, deren Erweiterung überall genau der Formel  $q = r^2 \pi e^{2\beta z}$  entspricht. Zweitens ist die numerische Rechnung recht umständlich. — Der Benutzung von Röhren mit beliebig gestalteten grösseren Erweiterungen scheint der Umstand entgegenzustehen, dass Temperaturänderungen ähnlich wie beim Thermometer die Flüssigkeitssäule in der Röhre verschieben. Man kann jedoch unter der Voraussetzung, dass die Temperatur des Beobachtungsraumes sich während der Versuchsdauer wenig ändert, den hieraus resultirenden Fehler vernachlässigen. Wählen wir eine Erweiterung von 5 ccm Inhalt und eine Röhre von 2 qmm Querschnitt, so würde eine Temperaturzunahme von 14° auf 15° die Flüssigkeitssäule nur um 0,3 mm verschieben, wenn der Ausdehnungscoefficient der Flüssigkeit mit dem des Wassers übereinstimmte. Bei einer Röhrenlänge von 30 mm Länge würde der Fehler höchstens 1 Proc. betragen können.

Die Berechnung der Concentration zur Zeit  $t$  lässt sich bei Annahme einer grösseren Erweiterung mit unseren Formeln leicht durchführen. Nehmen wir zunächst eine Erweiterung von der Form  $q = r^2 \pi e^{2\beta z}$  an, deren Oeffnungswinkel sehr gross sei. Ist in der Gleichung (12)  $\beta$  sehr gross und  $\alpha_1$  klein gegen  $\beta$ , so geht (12) über in

$$\alpha_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 a) = \frac{r^2 \pi}{V}. \quad V = \frac{r^2 \pi (e^{2\beta b} - 1)}{2\beta}$$

bedeutet hier das Volumen der Erweiterung. Ist  $v$  das Volumen der Röhre, so lässt sich diese Gleichung auf die Form bringen

$$(20) \quad \alpha_1 a \operatorname{tg}(\alpha_1 a) = \frac{v}{V}.$$

Nimmt man ferner an, dass  $v/V$  den Werth  $1/50$  nicht



überschreite, so findet man aus (20), dass man mit grosser Genauigkeit setzen kann  $\alpha_1^2 a^2 = v/V$  und  $\alpha_1 a = \lambda \pi$ . Die Berechnung der Coefficienten  $c_1, c_2, \dots$  aus (17) liefert dann für die Concentration  $e$  in der Röhre die Reihe:

$$(21) \quad e = 1 - \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - \dots$$

$\tau$  ist  $= e^{-\pi^2 t/a^2}$ . Die Reihe verschwindet für jeden Werth von  $t$ , wenn  $x = a$  ist. Eine Erweiterung, die ein mindestens 50mal so grosses Volumen hat wie die Röhre, wirkt also wie ein Raum, der so gross ist, dass seine Concentration durch die während der Versuchsdauer in ihn diffundirende geringe Salzmenge nicht merklich zunimmt. Offenbar ist die Form der Erweiterung in diesem Falle ohne Einfluss, man kann daher auch Röhren mit kugelförmigen Erweiterungen von der Form Fig. 2 benutzen, wodurch die Anwendung grösserer Electroden  $e$  gestattet ist.



Fig. 2.

Aus (21) und (18) findet man durch Rechnung folgende Werthe für den Widerstand:

$$\begin{array}{ccccc} \tau = & 1 & 0,75 & 0,70 & 0,65 & 0,50 \\ W_t = & 1 & 0,8595 & 0,8442 & 0,8292 & 0,7860 \end{array}$$

Hieraus ergibt sich die für Werthe von  $\tau$  zwischen 0,75 und 0,50 geltende Formel:

$$W_t = 0,6615 + 0,219 \tau + 0,06 \tau^2.$$

Der nachstehend mitgetheilte Versuch wurde mit einer Röhre angestellt von 44,2 mm Länge und 2 mm Durchmesser, deren Kugel ein Volumen von 6,2 ccm hatte. Die Temperatur sank während der 36stündigen Beobachtungszeit von 15,1° auf 14,9°.

$r =$	14,2	18,7	21,3	24,3	35,3
$W_t =$	0,8431	0,8234	0,8084	0,7973	0,7621
$\tau =$	0,713	0,632	0,582	0,541	0,413
$-\frac{\log \tau}{t} =$	0,0103	0,0107	0,0110	0,0110	0,0109

Die geringen Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe von ihrem Mittelwerthe 0,0108 dürften lediglich auf Beob-

achtungsfehler zurückzuführen sein. Der Mittelwerth ergibt aus der Formel  $e^{-\kappa x^2 t/a^2} = \tau$  für  $\kappa$  den Werth 4,93 (mm<sup>2</sup>/Stunde), welcher von dem oben angegebenen Werthe 4,97 wenig abweicht.

Ich habe die Absicht, womöglich in nächster Zeit für eine Reihe von Substanzen die Diffusionscoefficienten nach dieser Methode zu bestimmen.

Osnabrück, den 19. September 1892.

## XI. Ueber die absolute Compressibilität des Quecksilbers; von G. de Metz.<sup>1)</sup>

(Mercur Taf. VIII Fig. 12—17.)

1. Die meisten Physiker, welche sich mit der Compressibilität der Flüssigkeiten beschäftigten, behandelten dieselbe vom experimentellen Standpunkte, mit Ausnahme von Regnault, welcher seine Resultate mit der Elasticitätstheorie von Lamé verglich. Es war für mich von besonderem Interesse, eine vergleichende Untersuchung der Theorie mit den gegebenen Methoden von Regnault und von Jamin durchzuführen, und zwar, wenn möglich, unter gleichen experimentellen Bedingungen. Dementsprechend wählte ich als Object das Quecksilber: Erstens, da verschiedene Autoren demselben wesentlich voneinander abweichende Compressibilitätscoefficienten zuschreiben; zweitens, da es weniger compressibel ist, als alle andere Flüssigkeiten. Folglich konnte die erwähnte Vergleichung mit aller Strenge durchgeführt werden.

Zur Zeit, als ich mich mit der Untersuchung dieses Gegenstandes beschäftigte, publicirte Hr. Amagat<sup>2)</sup> eine Abhandlung über dasselbe Thema; trotzdem der Plan seiner Arbeit und die Hilfsmittel, deren er sich bediente, andere waren, hatte ich doch die Freude zu erfahren, dass er mit mir zu einer übereinstimmenden Lösung der Frage gekommen ist.

2. Der Plan meiner Untersuchung war folgender:

- a) Es wurden vier cylindrische Piezometer mit halbsphärischen Endungen aus deutschem Glase von verschiedener Wanddicke (1,4 mm bis 2,9 mm) verwendet;
- b) jedes Piezometer wurde nach Regnault's
- c) und gleichzeitig nach Jamin's Methode untersucht;

1) Mitgetheilt der Naturforschergesellschaft der Universität Odessa den 8. Nov. 1890. Vgl. die Abhandlungen derselben, Mathem. Abth. 13. p. 109—227. 1891.

2) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 197. 1889, oder Ann. de chim. et de phys. (6) 22. p. 137. 1891.

d) mittels der Ergebnisse von Beobachtungen b) und c) und unter Berücksichtigung der Gleichung der sogenannten räumlichen elastischen Piezometerausdehnung berechnete ich noch einmal den Coefficienten der absoluten Compressibilität des Quecksilbers;

e) die Vergleichung der Resultate b), c), d) sollte entscheiden, welche der erwähnten Methoden richtig sei, und worin der Fehler derjenigen Methode bestehe, welche als unrichtig betrachtet werden soll.

3. Die von Hrn. Wild<sup>1)</sup> und Hrn. Marek<sup>2)</sup> ausgeführten Untersuchungen über die Reinheit des Quecksilbers haben gezeigt, dass die Art und Weise, in welcher die Reinigung vollzogen wird, nicht ohne Einfluss ist auf das spezifische Gewicht und möglicherweise auf andere physikalische Eigenschaften des Quecksilbers. Sie behaupten, reines Quecksilber habe ein spezifisches Gewicht von 13,5956 bei 0°.

Ich reinigte das Quecksilber folgendermaassen:

a) Es wurde nacheinander gewaschen mit einer Lösung von Salpetersäure, Wasser, einer Lösung von Kalilauge, wieder mit Wasser und endlich durch Erwärmen getrocknet;

b) dieses Quecksilber wurde dann 24 Stunden lang nach Th. M. Crafts' <sup>3)</sup> Verfahren mittels eines Luftstromes oxydirt, wobei sich seine Oberfläche mit einer Menge von Oxydationsproducten bedeckte;

c) endlich wurde es im Vacuum destillirt in einem Apparate ähnlich demjenigen von Weinhold;

d) mittels des Pyknometers fand ich sein spezifisches Gewicht 13,5958 bei 0°.

4. Die Piezometer wurden sehr sorgfältig gereinigt und getrocknet; die Böden derselben liess ich bis zum letzten Moment offen und schmolz sie dann erst halbsphärisch ab. Dabei achtete ich darauf, dass die Wanddicke des Bodens gleich der des cylindrischen Theiles war. Die Füllung geschah folgendermaassen. Jedes Piezometer in der Form *abcde*

1) Wild, Repertorium für Meteorologie. 3. p. 10—12, 42—50. St. Petersburg, 1874.

2) Marek, Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures à Paris. p. D. 58. 1893.

3) Th. M. Crafts, Beib. 14. p. 1176. 1890.

(Taf. VIII, Fig. 12) bestand aus dem Reservoir *ab*, aus der langen Capillare *bc* und einer Erweiterung *cd*, welche durch das Rohr *de* mit der Carré'schen Luftpumpe verbunden war. In die Erweiterung *cd* wurde ein Quantum von Quecksilber gegossen, welches genügte, um nicht bloss das Reservoir *ab*, sondern noch einen Theil der Erweiterung *cd* zu füllen; dann wurde die Luft bis auf 1 mm evacuirt und das ganze System *abcde* mittels eines Brenners von vier Flammen in *M* erwärmt. Zu diesem Zwecke wurde das Piezometer auf dem halbcylindrischen Eisenblech *MN* (Fig. 12) schief eingestellt, mittels Asbest in den Puncten *o*, *p*, *q* isolirt und mit ähnlichem Eisenblech dicht bedeckt. Das Sieden begann nach 15—20 Minuten und dauerte 10—15 Minuten, worauf die Flamme gelöscht wurde. Das Piezometer erkaltete und füllte sich mit dem Quecksilber. Jedoch bemerkte ich bald, dass nach dem ersten Sieden noch immer sehr kleine Luftblasen bleiben, und wiederholte deswegen diese Manipulation; nach dem zweiten Sieden fand ich keine Spur der Luft mehr.

Als das Piezometer bei Zimmertemperatur gefüllt war, schnitt ich die Erweiterung *cd* ab und verschmolz mit der Capillare *bc* eine graduirte Capillare *C*. Dadurch man die graduirte Capillare *C* immer rein und trocken halten kann. Während meiner Untersuchungen benutzte ich diese Operation jedesmal, wenn die Capillare *C* feucht oder unrein erschien.

5. Das Piezometer wurde nachher mit gutem Siegelack in eine T-förmige Messinghülse *aa* (Fig. 13) eingekittet, und zwar so tief, dass das halbkugelförmige Ende bei der Capillare *C* bedeckt wurde; dies war nothwendig wegen der leichten Zerbrechlichkeit des mit Quecksilber gefüllten Piezometers.

Ausserdem<sup>1)</sup> verwandte ich:

a) Eine Cailletet'sche Pumpe, welche einen Druck bis 9,3 Atm. aushielt;

b) ein Luftmanometer und ein Quecksilbermanometer; die Zimmertemperatur des Luftthermometers wurde durch Wasser constant erhalten;

c) zwei Thermometer. Die Temperatur des Bades, worin sich der ganze Apparat (Fig. 13) befand, wurde auf einem bis

1) Vgl. G. de Metz, Wied. Ann. 41. p. 664—668. 1890.

auf 0,02° C. eingetheilten Alvergniat'schen Thermometer abgelesen; die Temperatur des Luftmanometers — nach einem gewöhnlichen guten bis auf 1° C. eingetheilten Thermometer. Einige Versuche wurden bei 0° ausgeführt;

d) eine graduirte Capillare *C*. Jede Theilung  $\beta$  derselben fasste in sich 0,26386 mm, d. h.  $\beta = 0,26386 \pm 0,00028$  mm, und da der Abstand zwischen je zwei Strichen 1,5 mm betrug, so erfolgte die Schätzung bis auf das Zehntel ohne irgend eine Schwierigkeit. Diese Capillare, von deren Regelmässigkeit ich mich überzeugt hatte, wurde nach und nach bei allen Piezometern angeschmolzen;

e) das Correctionsrohr *F*. Seine Theilung  $\beta_1 = 1,0038 \pm 0,0001$  mm. Nach meiner Beobachtung war es nicht thunlich, eine Capillare von grösserer Empfindlichkeit zu benutzen, wegen der Störungen, welchen die Bewegung des Meniscus unterliegt, gleichwohl, ob Wasser oder Quecksilber gebraucht wird. Das Correctionsrohr *F* stand jetzt horizontal;

f) die Cailletet'sche Pumpe und der Apparat (Fig. 13) wurden in eine solche Verbindung gebracht, dass es möglich war, nach der Regnault'schen Methode oder nach der Jamin'schen zu operiren. Wollte man z. B. nach Regnault verfahren, so verband man die Oeffnungen *G* und *f* mit der Pumpe; ging man zur Jamin'schen Methode über, so verband man nur die Oeffnung *f* mit der Pumpe und setzte an die Oeffnung *G* das Correctionsrohr *F* an. Wenn eine Verbindung der Pumpe mit den Oeffnungen *G* und *f* stattfindet, so beobachtet man bei Druckvergrösserung eine scheinbare Volumenverminderung  $\theta''$  des Quecksilbers in der Capillare *C*. Bleibt die Oeffnung *G* allein in Verbindung, während die Oeffnung *f* mit der freien Atmosphäre in unmittelbarer Verbindung steht, so beobachtet man eine scheinbare Volumenvergrösserung  $\theta'$  des Quecksilbers in der Capillare *C*. Uebt man den Druck durch die Oeffnung *f* allein aus, so beobachtet man eine scheinbare Volumenverminderung  $\theta$  des Quecksilbers in der Capillare *C* und eine scheinbare Volumenvergrösserung  $\gamma$  des Wassers im Correctionsrohre *F*. Diese Manipulationen gingen rasch und leicht vor sich; dank dem Umstande, dass das ganze Verbindungssystem ohne Hähne gebaut war und

nur mittels Schrauben, Muttern und Metallstößeln functionirte — der Druck bleibt sehr constant.

6. Die Regnault'sche Methode gründet sich auf den Formeln der Elasticitätstheorie, welche von der genauen Bestimmung der Piezometer-Dimensionen abhängen. Eine der feinsten Messungen in diesem Gebiete ist die Messung der inneren  $R_0$ - und äusseren  $R_1$ -Radien des cylindrischen Theiles; dieselbe wurde mit einem bis auf 0,02 mm getheilten Comparator ausgeführt. In folgender Tabelle I sind die Mittelwerthe von  $R_0$  und  $R_1$  gegeben; jede Zahl wurde folgendermaassen erhalten. Zwei Ringe wurden am oberen (a)- und unteren (b)-Ende des Piezometerrohres vor dessen Zuschmelzung abgeschnitten und jeder Ring wurde nach vier verschiedenen Durchmessern im Abstände von  $45^\circ$  untersucht.

Tabelle I.

Constanten von  $R_1$  und  $R_0$  der Piezometer.

Nammer und Art des Glases	$R_1$	$R_0$	$R_1 - R_0 = e$
	mm	mm	mm
I   Greiner & Co. in Stützerbach	10,221	8,808	1,413
II   bei Ilmenau in Thüringen	9,316	7,254	2,062
III   E. Gundelach in Gehlberg	10,156	7,722	2,434
IV   bei Elgersburg in Thüringen	9,288	6,413	2,875

Es ist aber von Wichtigkeit, hier mitzutheilen, inwiefern die Radien  $R_{1(a)}$  und  $R_{1(b)}$ , sowie  $R_{0(a)}$  und  $R_{0(b)}$  voneinander abweichen, da dieser Unterschied die Cylindricität jedes Piezometers charakterisirt und in theoretischer Hinsicht eine grosse Rolle spielt.

Tabelle II.

Radienveränderungen längs der Cylinderaxe.

Nr.	$R_{1(a)}$	$R_{1(b)}$	$\Delta R_1 = R_{1(a)} - R_{1(b)}$	$R_{0(a)}$	$R_{0(b)}$	$\Delta R_0 = R_{0(a)} - R_{0(b)}$
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
I	10,221	10,275	- 0,054	8,808	8,820	- 0,012
II	9,235	9,397	- 0,162	7,177	7,330	- 0,153
III	10,017	10,293	- 0,278	7,615	7,830	- 0,215
IV	9,431	9,145	+ 0,286	6,452	6,372	+ 0,080



Tabelle III.

Wanddickeveränderungen längs der Cylinderaxe.

Nr.	$\Delta R_1 = R_{1(a)} - R_{1(b)}$	$\Delta R_0 = R_{0(a)} - R_{0(b)}$	$\Delta e = \Delta R_1 - \Delta R_0$	$e$
	mm	mm	mm	mm
I	- 0,054	- 0,012	0,042	1,413
II	- 0,162	- 0,153	0,009	2,062
III	- 0,278	- 0,215	0,063	2,434
IV	+ 0,286	+ 0,080	0,206	2,875

Diese zwei Tabellen zeigen uns, dass 1. die Cylindricität der Röhren nicht vollkommen ist, denn die Differenzen  $\Delta R_1$  und  $\Delta R_0$  betragen zuweilen 2,8 Proc.; 2. die Wanddicke  $e$  ist nicht überall gleich, denn die Differenzen  $\Delta e$  erreichen ca. 2 Proc. für Nr. I, II, III und ca. 7 Proc. für Nr. IV.

7. Auf Grund der gemachten Messungen lassen sich die Volumina der Piezometer berechnen:  $U_0 = \pi R_0^2 H$  das Volumen des cylindrischen Theiles,  $V_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3$  des sphärischen,  $W_0 = U_0 + V_0$  das gesammte Volumen. Das Volumen  $W_0$  wurde einerseits aus Dimensionen berechnet, andererseits direct durch Wägung bestimmt. Die Tabelle IV enthält die entsprechenden Data.

Tabelle IV.

Piezometervolumina  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $W_0$ .

Nr.	$H$	$U_0$	$V_0$	ber. $U_0 + V_0$	$W_0$ beob.	$\Delta W_0 = U_0 + V_0 - W_0$
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
I	228	55544	2861	58405	57756	+ 649
II	256	42295	1598	43893	43905	- 12
III	227	42508	1928	44436	44219	+ 217
IV	249,5	32221	1104	33325	33091	+ 234

Die Differenzen  $\Delta W_0$  zwischen den Colonnen  $U_0 + V_0$  und  $W_0$  erreichen nur 0,03—1,10 Proc. Solche Schwankungen kann man als günstig betrachten; Grassi<sup>1)</sup> hat grössere Unterschiede gehabt von 0,7—5,7 Proc. (Piezometer B). Es ist leicht deren Ursprung zu finden, wenn man sich erinnert, dass Glasröhren nie vollständig cylindrisch sind, und dass es nicht möglich ist, die Spitzen derselben so abzuschmelzen, dass die

1) Grassi, Ann. de chim. et de phys. (3) 31. p. 445—446. 1851.

Radien der cylindrischen und sphärischen Theile einander gleich bleiben.

8. Wir haben also mit folgenden Grössen zu thun:  $R_1$ ,  $R_0$ ,  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $W_0$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  und  $\gamma$ , um nach Lamé die Coefficienten der absoluten Compressibilität  $\chi_v$ , der scheinbaren  $\chi_a$  und der kubischen  $\alpha$  des Piezometers zu berechnen. Aber die von Lamé<sup>1)</sup> gegebenen Gleichungen sind auf die Hypothese gegründet, dass die sogenannte Poisson'sche Constante  $\sigma$ , d. h. das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilation des ausgedehnten Stabes, für homogene und isotrope feste Körper gleich ist dem Bruche  $\sigma = 0,25$ . Wir wollen hier nicht eingehen in die Controversen bezüglich dieser Hypothese, welche seit Navier bis zur letzten Zeit stattgefunden haben, denn sie bleiben ohne Einfluss auf die uns interessirende Frage.<sup>2)</sup> Wir betrachten die Abhängigkeit von den beiden Lamé'schen Elasticitätsconstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , welche sich mit Young's Modul  $E$ , Poisson's Constante  $\sigma$  und der kubischen Compressibilität  $\alpha$  mittels folgender Gleichungen verbinden:

$$(1) \quad E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu + \lambda},$$

$$(2) \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)},$$

$$(3) \quad \alpha = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Es ist leicht, die nöthigen Gleichungen für cylindrische sowie für sphärische Umhüllungen herzustellen: Es sei ein homogener und isotroper Hohlcylinder mit ebenen Böden gegeben, welcher einen inneren Druck  $P_0$  und einen äusseren  $P_1$  erleidet; es sei die Länge  $H$  dieses Cylinders so gross, dass man den Einfluss der Böden vernachlässigen kann; es sei  $\rho$  die Verschiebung des Theilchens, welches sich in der zur Cylinderaxe senkrechten Ebene befindet und dessen Abstand von dieser Axe in der Radiusrichtung  $r$  ist. Lamé<sup>3)</sup> hat

1) Regnault, Mém. de l'institut de France. 21. p. 438—442. 1847.

2) Wir haben diese Frage behandelt im zweiten Kapitel unserer russischen Abhandlung p. 158—179.

3) Lamé, Leçons sur l'élasticité des corps solides. p. 189. Paris, 1867.

gezeigt, dass diese Verschiebung durch folgende Gleichung mit zwei Constanten  $a$ ,  $b$  dargestellt wird:

$$(4) \quad \varrho = a r + \frac{b}{r}.$$

Ausser der Verschiebung in der Richtung des Radius ist noch eine andere  $\xi$  möglich in der Richtung  $H$  der Cylinderaxe; sie wird bestimmt mittels der Gleichung mit einer Constante  $c$ :

$$(5) \quad \xi = c H.$$

Haben  $R_1$ ,  $R_0$ ,  $P_1$ ,  $P_0$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  die obenerwähnten Bedeutungen, so drückt man die Constante  $a$ ,  $b$ ,  $c$  folgendermaassen aus:

$$(6) \quad a = c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3},$$

$$(7) \quad b = \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Führen wir diese Werthe von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in die Gleichungen (4) und (5) ein, so bekommen wir für  $\varrho$  und  $\xi$  die Ausdrücke:

$$(8) \quad \varrho = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} \cdot r + \frac{1}{2\mu} \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3} \frac{1}{r},$$

$$(9) \quad \xi = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} \cdot H.$$

Mittels dieser zwei Ausdrücke kann man die Volumenveränderung  $\Delta U_0$  bestimmen, wenn man bemerkt, dass unter dem Einflusse der äusseren Kräfte der Radius  $R_0$  sich in  $R_0 + \varrho$  und die Höhe  $H$  in  $H + \xi$  verändert. Das neue Volumen

$$(10) \quad U_0 + \Delta U_0 = \pi (R + \varrho)^2 (H + \xi),$$

und die Volumenvergrösserung

$$(11) \quad \Delta U_0 = 2\pi R_0 H \varrho + \pi R_0^2 \xi,$$

oder auf Einheit des Volumens bezogen

$$(12) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{2\varrho}{R_0} + \frac{\xi}{H}.$$

Um aus der letzten Gleichung diesen Werth wirklich zu berechnen, benutzen wir die Gleichung (8), indem wir darin  $r = R_0$  setzen und die Gleichung (9); dann haben wir:

$$(13) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{\mu} \frac{R_1^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Dieser Ausdruck ist ganz allgemein. Wir werden nur diejenigen Volumenveränderungen betrachten, welche in den Compressibilitätsversuchen der Flüssigkeiten eintreten, und der Einfachheit wegen bezeichnen wir ein für alle Mal:

$$(14) \quad \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} = M; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = M + 1.$$

a) Es sei  $P_1 = 0$ , dann:

$$(15) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{3M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(16) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \left\{ \frac{M(5\mu + \lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(17) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = P_0 \kappa \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\}.$$

b) Es sei  $P_0 = 0$ , dann:

$$(18) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \left\{ \frac{3(M+1)}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{\mu} \right\},$$

oder

$$(19) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3):

$$(20) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -P_1 \kappa \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu}.$$

c) Es sei  $P_1 = P_0 = P$ , dann:

$$(21) \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu} = -\kappa P.$$

Aus den Gleichungen (17), (20), (21) erhält man die Originalformel von Lamé,<sup>1)</sup> indem man  $\lambda = \mu$  setzt, nämlich:

$$(17') \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = \frac{8M+5}{3} \kappa P_0,$$

$$(20') \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{8(M+1)}{3} \kappa P_1,$$

$$(21') \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta U_0}{U_0} = -\frac{3P}{5\mu} = -\kappa P.$$

9. Es bleibt noch übrig, ähnliche Gleichungen für die sphärischen Theile des Piezometers zu erhalten. Wenden wir

1) Regnault, l. c. p. 440.

uns wieder zu Lamé,<sup>1)</sup> so sehen wir — dass die Verschiebung  $\varrho$  eines Theilchens, das sich im Abstand  $r$  vom Centrum befindet und sich nach der Radiusrichtung bewegt — durch die Gleichung mit zwei Constanten  $a$ ,  $b$

$$(22) \quad \varrho = ar + \frac{b}{r^2}$$

ausgedrückt wird. Wenn, wie schon erwähnt,  $R_0$  den inneren,  $R_1$  den äusseren Radius,  $P_0$  den inneren und  $P_1$  den äusseren Druck,  $\lambda$  und  $\mu$  die Lamé'schen Constanten bedeuten, so sind

$$(23) \quad a = \frac{R_0^3 P_1 - R_1^3 P_0}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)},$$

$$(24) \quad b = \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)}.$$

Führen wir diese Werthe von  $a$  und  $b$  in die Gleichung (22) ein, so bekommen wir die Verschiebung

$$(25) \quad \varrho = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} \cdot r + \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Mittels dieses Ausdruckes berechnen wir die Volumenveränderung  $\Delta V_0$ , indem wir bemerken, dass unter dem Einflusse der äusseren Kräfte der Radius  $R_0$  sich in  $R_0 + \varrho$  verändert. Das neue Volumen

$$(26) \quad V_0 + \Delta V_0 = \frac{4}{3} \pi (R_0 + \varrho)^3,$$

oder, nach Vernachlässigung der zweiten und dritten Potenzen der unendlich kleinen Verschiebungen, die Volumenvergrößerung

$$(27) \quad \Delta V_0 = 4\pi R_0^2 \varrho,$$

und auf die Einheit der Volumen bezogen

$$(28) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3\varrho}{R_0}.$$

Aus dieser Gleichung finden wir den Werth von  $\Delta V_0/V_0$ , indem wir in der Gleichung (25)  $r = R_0$  setzen, nämlich:

$$(29) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3(R_0^3 P_0 - P_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)} + \frac{3R_1^3 (P_0 - P_1)}{4\mu(R_1^3 - R_0^3)}.$$

Wenden wir diese allgemeine Gleichung auf die ähnlichen Fälle an, welche schon unter den Buchstaben  $a$ ,  $b$ ,  $c$  des

1) Lamé, l. c. p. 212 etc.

vorigen Paragraphen untersucht wurden, und setzen wir wieder der Kürze wegen:

$$(30) \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N + 1.$$

Dann:

$$(31) \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{3 N P_0}{3 \lambda + 2 \mu} + \frac{3 (N + 1) P_0}{4 \mu},$$

oder

$$(32) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = 3 P_0 \left\{ \frac{N (6 \mu + 3 \lambda) + (3 \lambda + 2 \mu)}{4 \mu (3 \lambda + 2 \mu)} \right\},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(32') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \alpha P_0 \left\{ \frac{N (6 \mu + 3 \lambda) + (3 \lambda + 2 \mu)}{4 \mu} \right\}.$$

$$(33) \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -3 P_1 (N + 1) \left\{ \frac{1}{3 \lambda + 2 \mu} + \frac{1}{4 \mu} \right\},$$

oder

$$(34) \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3 P_1 (N + 1) (6 \mu + 3 \lambda)}{4 \mu (3 \lambda + 2 \mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(34') \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{\alpha P_1 (N + 1) (6 \mu + 3 \lambda)}{4 \mu}.$$

$$(35) \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3 P}{3 \lambda + 2 \mu} = -\alpha P.$$

Aus den Formeln (32'), (34), (35) bekommen wir dieselben von Lamé<sup>1)</sup>, indem wir setzen  $\lambda = \mu$ , nämlich:

$$(32'') \quad a) P_1 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{9 N + 5}{4} \alpha P_0.$$

$$(34'') \quad b) P_0 = 0; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{9 (N + 1)}{4} \alpha P_1.$$

$$(35') \quad c) P_1 = P_0 = P; \quad \frac{\Delta V_0}{V_0} = -\frac{3 P}{5 \mu} = -\alpha P.$$

Auf Grund der in den zwei letzten Paragraphen enthaltenen Werthe lässt sich die Volumenveränderung eines complicirten Piezometers, welches eine Form des Cylinders mit halbsphärischen Endungen hat, berechnen, man muss aber die bekannte Hypothese hinzufügen, dass die Volumenveränderung des gesammten Volumen

$$(36) \quad \Delta W_0 = \Delta U_0 + \Delta V_0.$$

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 439.

In diesem Falle erhalten wir die folgende Tabelle der Formeln:

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\} \\ \quad + 3 P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = P_0 \alpha U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ \quad + P_0 \alpha V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \text{b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ \frac{P_1 U_0 (M+1)(5\mu + 3\lambda)}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right. \\ \quad \left. + \frac{3 P_1 V_0 (N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \right\}, \end{array} \right.$$

oder

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \Delta W_0 = - \left\{ \frac{P_1 \alpha U_0 (M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right. \\ \quad \left. + \frac{P_1 \alpha V_0 (N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(III) \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \frac{3P}{3\lambda + 2\mu} (U_0 + V_0) = - \alpha P W_0.$$

Aus den Formeln (I), (II), (III) erhält man dieselben von Lamé<sup>1)</sup>, nach der Voraussetzung  $\lambda = \mu$ , nämlich:

$$(I) \text{ a) } P_1 = 0; \quad \Delta W_0 = \left\{ \frac{8M+5}{3} U_0 + \frac{9N+5}{4} V_0 \right\} \alpha P_0.$$

$$(II) \text{ b) } P_0 = 0; \quad \Delta W_0 = - \left\{ \frac{8(M+1)}{3} U_0 + \frac{9(N+1)}{4} V_0 \right\} \alpha P_1.$$

$$(III) \text{ c) } P_1 = P_0 = P; \quad \Delta W_0 = - \alpha P W_0.$$

Entsprechend dieser Tabelle können wir uns klar den Compressibilitätsprocess der Flüssigkeiten vorstellen. Nehmen wir z. B. an, dass ein und derselbe Druck innerhalb und ausserhalb des Piezometers ausgeübt wird — was wirklich bei den meisten Experimenten seit Canton gefunden wurde und sich bis jetzt bestätigt hat — d. h.  $P_1 = P_0 = P$ , so beobachten wir eine Senkung  $\theta''$  des Niveau in der Capillare C; dieselbe besteht aber nicht aus blossem Sinken, welches als Wirkung der Flüssigkeitscompressibilität allein betrachtet werden soll, sondern sie enthält auch das Steigen, welches nach der

1) Lamé. Regnault, l. c. p. 442.



Gleichung (III) von der Wandcompressibilität des Piezometers herkommen muss. Folglich, wenn man durch  $\chi_a$  den Coefficienten der scheinbaren Flüssigkeitscompressibilität und durch  $\alpha$  den Coefficienten der Wandcompressibilität des Piezometers bezeichnet, findet man den Coefficienten  $\chi_v$  der wirklichen Compressibilität mittels der Beziehung

$$(IV) \quad \chi_v = \chi_a + \alpha.$$

Die Bestimmung des Coefficienten  $\alpha$  erfolgt mittels der Niveauveränderung  $\theta'$  in der Capillare  $C$  unter dem Einflusse eines äusseren Druckes  $P_1$  und mittels der Gleichung (II) oder (II'), also

$$(V) \quad \alpha P_1 = \frac{\theta'}{\frac{(5\mu + 3\lambda)(M+1)U_0}{3\mu} + \frac{(6\mu + 3\lambda)(N+1)V_0}{4\mu}}.$$

Das Vorzeichen — verschwindet, da  $\theta'$  und  $\Delta W_0$  entgegengesetzte Zeichen haben.

10. Wir haben noch den Zusammenhang zwischen den Grössen  $\theta'$ ,  $\theta''$  und  $\theta$  — das Niveausinken bei  $P_1 = 0$  — aufzuklären. Offenbar enthält die Niveauverschiebung  $\theta$  nicht bloss das der wahren Compressibilität der Flüssigkeit entsprechende Herabsinken  $\theta'' + \alpha P_0 W_0$  [nach der Gleichung (IV)], sondern auch die elastische räumliche Ausdehnung des Piezometers, welche sich aus der Gleichung (I) ergibt, d. h.:

$$\theta = \theta'' + \alpha P_0 U_0 + \alpha P_0 V_0 + \alpha P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} + \alpha P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\},$$

oder

$$\theta = \theta'' + \alpha P_0 U_0 \left\{ \frac{(M+1)(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} \right\} + \alpha P_0 V_0 \left\{ \frac{(N+1)(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right\};$$

da aber bei der Bedingung  $P_1 = P_0$ , nach der Gleichung (V), die letzten zwei Glieder gleich sind der Verschiebung  $\theta'$ , so hat man

$$(VI) \quad \theta = \theta' + \theta''.$$

Diese Gleichung wurde von Regnault Bedingungsgleichung genannt; mit Hülfe derselben controlirte er die Genauigkeit seiner Experimente.

11. Es ist von Interesse, darauf aufmerksam zu machen, dass man viel besser diesen Werth von  $\theta$  benutzen kann, wenn man ihm einen selbständigen Sinn gibt und mit seiner Hülfe die absolute Compressibilität berechnet. In diesem Falle wird die einfache Gegeneinanderstellung von  $\theta$  und  $\theta' + \theta''$  durch die Vergleichung von Coefficienten der absoluten Compressibilität ersetzt, was bedeutend anschaulicher ist. Wollen wir bezeichnen durch  $\theta$ , wie schon erwähnt, das Niveausinken unter dem Einflusse des inneren Druckes  $P_0$ , durch  $\Theta_0$  — die elastische räumliche Piezometerausdehnung unter demselben Drucke, durch  $W_0 = U^0 + V_0$  — das innere Volumen des genannten Piezometers, dann ergibt sich für den Coefficienten der absoluten Compressibilität  $\chi_v$ , der Definition nach, der Ausdruck

$$(VII) \quad \chi_v = \frac{\theta - \Theta_0}{P_0 W_0},$$

in welchem alle Glieder der rechten Seite bestimmt werden können, und zwar  $\theta$ ,  $P_0$ ,  $W_0$  — durch das Experiment,  $\Theta_0$  aber — durch Berechnung aus der Gleichung (I) oder (I'), nämlich:

$$(VIII) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta_0 &= \alpha P_0 U_0 \left\{ \frac{M(5\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{3\mu} \right\} \\ &+ \alpha P_0 V_0 \left\{ \frac{N(6\mu + 3\lambda) + (3\lambda + 2\mu)}{4\mu} \right\}, \end{aligned} \right.$$

oder bei  $\lambda = \mu$

$$(VIII') \quad \Theta_0 = \alpha P_0 \left\{ \frac{8M+5}{3} U_0 + \frac{9N+5}{4} V_0 \right\}.$$

Um diese Berechnung auszuführen, muss man den Coefficienten  $\alpha$  vorauskennen; wenn aber dies nicht der Fall ist, so gebraucht man die bekannte Regnault'sche Experimental-methode. In solcher Weise kann statt der Bedingungs-gleichung (VI), eine selbständige Methode begründet werden. Eine volle Bestimmung des Coefficienten  $\chi_v$  mittels derselben erfordert folgende zwei Manipulationen:

Man übt auf das Piezometer und die in ihm befindliche Flüssigkeit einen inneren Druck  $P_0$  aus und misst das Niveausinken  $\theta$  in der Capillare  $C$ .

b) Man übt auf das Piezometer allein einen äusseren Druck  $P_1$  aus und misst das Niveaussteigen  $\theta'$  in derselben Capillare  $C$ .

c) Dann erhalten wir mittels dieser Angaben und nach den Gleichungen (VII) und (VIII) den Coefficient  $\chi_v$ .

Es scheint mir, dass in einigen Fällen die Anwendung der vorgeschlagenen Methode sehr nützlich werden kann, weil nach derselben der Coefficient  $\chi_v$  sich aus der Summe der Verschiebung  $\theta = \theta' + \theta''$  und nicht aus der Differenz  $\theta'' = \theta - \theta'$  wie bei Regnault, berechnen lässt. Diese Methode wird überhaupt zweckdienlich bei der Untersuchung von sehr wenig compressibeln Flüssigkeiten, wie Quecksilber, und bei Bestimmung des Zusammenhanges zwischen der Compressibilität und der Temperatur eines flüssigen Körpers. Bei der Bearbeitung meiner Beobachtungen habe ich neben den Methoden von Regnault und Jamin auch diese dritte Methode angewendet und erhielt ein sehr befriedigendes Resultat, wie man aus den beifolgenden Tabellen ersehen kann.

12. Es ist noch eine theoretische Entwicklung der Jamin'schen Experimentalmethode zu geben.<sup>1)</sup> Bekanntlich nennt Jamin den Coefficienten der absoluten Compressibilität einer Flüssigkeit die Differenz von  $\theta - \gamma$  beim Druck Einheit und Volumen Einheit, d. h.

$$(IX) \quad \chi_v = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0};$$

$\gamma$  ist die Niveauveränderung im Correctionsrohre  $I$  (vgl. § 5, e, f). Dieser Ausdruck, seiner Form nach, wird identisch mit der Gleichung (VII), bei der Bedingung, dass die Angabe  $\gamma$  des Correctionsrohres  $I$  gleich sei der elastischen räumlichen Dilatation  $\Theta_0$ , d. h. die Jamin'sche Methode würde in Einklang sein mit der Electricitätstheorie im Falle, dass

$$\gamma = \Theta_0,$$

da dieses aber nicht zutrifft, ist die Unrichtigkeit der Methode bewiesen. Wir fanden schon den Ausdruck für die elastische Ausdehnung  $\Theta_0$  (VIII) und wenden uns jetzt zu dem ähnlichen Ausdrucke für  $\gamma$ , um sie später mit einander zu vergleichen. Die Volumenveränderung  $\gamma$  im Correctionsrohre ist allerdings nichts Anderes, als eine Differenz  $\Delta W_1$  zwischen

1) Jamin, *Compt. rend.* 66, p. 1104. 1868. Siehe auch Deschamps, *Etude de la Compressibilité des liquides. Thèses de doctorat.* Paris, pp. 1—35 in 4°. 1878.

dem anfänglichen äusseren Volumen  $W_1$  des Piezometers bei  $P_0 = 0$  und dem endlichen  $W_1 + \Delta W_1$  bei gewissem Drucke  $P_0$ . Berechnen wir — bei der Annahme, dass wieder  $\Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V_1$ , — die Volumenvergrösserung  $\Delta W_1$  für jeden Theil besonders: besonders für den cylindrischen Theil  $\Delta U_1$  des Piezometers und besonders für den sphärischen  $\Delta V_1$ . Zu diesem Zwecke kehren wir zurück zu den Gleichungen (8), (9) und setzen in der Gleichung (8)  $r = R_1$ ; dann, übereinstimmend mit der Gleichung (12):

$$(39) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{2\varrho}{R_1} + \frac{\xi}{H},$$

oder nach der Substitution von  $\varrho$  und  $\xi$  durch die entsprechenden Grössen

$$(40) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Diese allgemeine Gleichung kann vereinfacht werden, da das Experiment nur bei innerem Drucke  $P_0$  stattfindet; infolgedessen setzen wir  $P_1 = 0$  und

$$(41) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = M P_0 \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{1}{\mu} \right\}.$$

oder

$$(42) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(43) \quad \Delta U_1 = \frac{M P_0 U_1 x (5\mu + 3\lambda)}{3\mu},$$

oder, bei der Annahme  $\lambda = \mu$

$$(44) \quad \Delta U_1 = \frac{8 M P_0 U_1 x}{3}.$$

Um die Volumenveränderung  $\Delta V_1$  berechnen zu können, wenden wir uns an die Gleichung (25) und ersetzen in derselben  $r$  durch  $R_1$ , dann ist der Gleichung (28) nach

$$(44) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{3\varphi}{R_1} = \frac{3(R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1)}{(3\lambda + 2\mu)(R_0^3 - R_1^3)} + \frac{3}{4\mu} \frac{R_0^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3},$$

aber da wieder  $P_1 = 0$ , so schreiben wir einfacher

$$(45) \quad \frac{\Delta V_1}{V_1} = \left\{ \frac{3}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3}{4\mu} \right\} N P_0,$$

oder

$$(46) \quad \Delta V_1 = \frac{3 N P_0 V_1 (6\mu + 3\lambda)}{4\mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und nach der Bezeichnung (3)

$$(47) \quad \Delta V_1 = \frac{N P_0 V_1 \kappa (6\mu + 3\lambda)}{4\mu},$$

oder, bei der Annahme  $\lambda = \mu$ ,

$$(47') \quad \Delta V_1 = \frac{9 N P_0 V_1 \kappa}{4}.$$

Nun setzen wir zusammen den vollen Ausdruck der Volumenveränderung

$$(48) \quad \gamma = \Delta W_1 = \Delta U_1 + \Delta V_1$$

auf Grund der Gleichungen (43), (47) und bekommen endlich:

$$(49) \quad \gamma = P_0 \kappa \left\{ \frac{(5\mu + 3\lambda)}{3\mu} M U_1 + \frac{(6\mu + 3\lambda)}{4\mu} N V_1 \right\}.$$

Es bleibt jetzt nichts übrig, als die Ausdrücke von  $\gamma$  (49) und  $\Theta_0$  (VIII) mit einander zu vergleichen. Bilden wir ihre Differenz:

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - \Theta_0 &= P_0 \kappa \left[ \frac{(U_1 - U_0) M (5\mu + 3\lambda)}{3\mu} + \frac{(V_1 - V_0) N (6\mu + 3\lambda)}{4\mu} \right. \\ &\quad \left. (-3\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{U_0}{3\mu} + \frac{V_0}{4\mu} \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

und bemerken, dass

$$(51) \quad (U_1 - U_0) M = U_0 (a) \quad \text{und} \quad (V_1 - V_0) N = V_0 (b),$$

so bekommen wir:

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - \Theta_0 &= P_0 \kappa \left\{ \frac{U_0}{3\mu} (5\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{V_0}{4\mu} (6\mu + 3\lambda - 3\lambda - 2\mu) \right\}. \end{aligned} \right\}$$

und schliesslich:

$$(53) \quad \gamma - \Theta_0 = P_0 \kappa (U_0 + V_0) = P_0 \kappa W_0.$$

Beziehen wir diese Differenz auf die Einheit des Druckes und des Volumens, so erhalten wir

$$(54) \quad \frac{\gamma - \Theta_0}{P_0 W_0} = \kappa$$

Dieses theoretische Resultat zeigt uns, dass die Jamin'sche Annahme über die Rolle des Correctionsrohres nicht richtig war, dass das Correctionsrohr nicht die elastische Ausdehnung des Piezometers bestimmen kann. Indem wir zur

Gleichung (VII) zurückkehren, so müssen wir dem erhaltenen Resultate entsprechend den folgenden Ausdruck des Coefficienten  $\chi_v$  geben:

$$(VII') \quad \chi_v = \frac{\theta - \Theta_0}{P_0 W_0} = \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0} + \alpha,$$

welcher uns überzeugt, dass zu dem nach der Jamin'schen Methode erhaltenen Compressibilitätscoefficienten noch der Coefficient  $\alpha$  der Wandcompressibilität des Piezometers hinzugefügt werden muss. Zum ersten Male wurde diese Correction von Hrn. Guillaume<sup>1)</sup> vorgeschlagen, aber in einer etwas abweichenden Form.

13. Die Gleichung (VII') führt uns zu dem Schlusse, dass

$$(55) \quad \frac{\theta - \gamma}{P_0 W_0} = \frac{\theta'}{P_0 W_0} = \frac{\theta - \theta'}{P_0 W_0} = \chi_a$$

und das

$$(X) \quad \gamma = \theta'$$

Auf solche Weise findet die Jamin'sche Methode ihre vollständige Erklärung; sie ist äquivalent der ersten Phase der Regnault'schen Methode, wenn man gleichzeitig auf das Piezometer den inneren und äusseren Druck ausübt und deshalb gibt sie nur scheinbare  $\chi_a$  und nicht absolute  $\chi_v$  Compressibilität der Flüssigkeiten. Man sieht auch zugleich, dass die cubische Wandcompressibilität des Piezometers  $\alpha$  nicht bloss nach Regnault's Verfahren, bei einem äusseren Drucke, bestimmt werden kann, sondern auch aus den Angaben  $\gamma$  des Correctionsrohres, bei innerem Drucke. Die Identität (X) kann direct bewiesen werden. Nach der Gleichung (38) ergibt sich

$$(56) \quad \theta' = \frac{P_1 U_0 (M+1) (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)} + \frac{3 P_1 V_0 (N+1) (6\mu + 3\lambda)}{4 \mu (3\lambda + 2\mu)},$$

und entsprechend der Gleichung (49)

$$(57) \quad \gamma = \frac{P_0 U_1 M (5\mu + 3\lambda)}{\mu (3\lambda + 2\mu)} + \frac{3 P_0 V_1 N (6\mu + 3\lambda)}{4 \mu (3\lambda + 2\mu)}.$$

Nehmen wir an, dass  $P_1 = P_0 = P$  sei und bilden das Verhältniss

$$(58) \quad \frac{\theta'}{\gamma} = \frac{4 P U_0 (M+1) (5\mu + 3\lambda) + 3 P V_0 (N+1) (6\mu + 3\lambda)}{4 P U_1 M (5\mu + 3\lambda) + 3 P V_1 N (6\mu + 3\lambda)},$$

1) Ch. E. Guillaume, *Compt. rend.* **103.** p. 1183. 1886 und *Archives des sciences physiques et naturelles* (3) **17.** pp. 155, 177. 1887.

so sehen wir, dass dies gleich Eins ist, da

$$U_0(M+1) = U_1 M \text{ und } V_0(N+1) = V_1 N,$$

d. h.

$$(X) \quad \gamma = \theta'.$$

14. Es bleibt jetzt nichts übrig, als alle diese theoretischen Betrachtungen durch das directe Experiment zu rechtfertigen. Da aber am meisten die erwähnten Formeln einige Schwierigkeiten bieten bei der Behandlung der beiden Elasticitätsconstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , so suchte ich zugleich nach dem Verhältnisse des Coefficienten  $\lambda$  zu dem Coefficienten  $\mu$  nur für das Glas allein, woraus meine Piezometer bestanden. Ich fand aus meinen eigenen Untersuchungen, sowie aus denen meiner Vorgänger, dass in der That die Poisson'sche Constante  $\sigma$  des Glases (im Mittel  $\sigma = 0,247$ ) sich dem theoretischen Werthe ( $\sigma = 0,250$ ) annähert, und dass die vereinfachten Lamé'schen Formeln als erste Annäherung vollständig dienen können.

Tabelle V.

Poisson'sche Constante  $\sigma$  für das Glas.

Name	Art des Glases	$\sigma$	Name	Art des Glases	$\sigma$
Wertheim <sup>1)</sup>	Bleiglas Choisy-le-Rois . . . . .	0,321	Amagat <sup>8)</sup>	Gewöhl. franz. .	0,245
Maxwell <sup>2)</sup>	Unbekanntes . . . . .	0,332	Amagat <sup>9)</sup>	Bleiglas Guilbert Martin . . . . .	0,250
Everett <sup>3)</sup>	Flintglas Nr. I James Couper & Sons, Glasgow .	0,258	Cantone <sup>10)</sup>	Unbekanntes . . .	0,257
Everett <sup>4)</sup>	Flintglas Nr. II A. & R. Cochran Glasgow . . . . .	0,229	Kowalsky <sup>11)</sup>	Greiner & Friedrichs . . . . .	0,226
Cornu <sup>5)</sup>	Saint-Gobain . . .	0,237	Kowalsky <sup>12)</sup>	Greiner & Friedrichs . . . . .	0,212
Voigt <sup>6)</sup>	Guinand in Paris .	0,213	Mercadier <sup>13)</sup>	Saint-Gobain u. a.	0,250
Voigt <sup>7)</sup>	Rheinisches . . .	0,208	De Metz . .	Greiner & Cie. .	0,237
			De Metz . .	Gundelach . . . .	0,235
				Franz. Bleiglas .	0,236

1) Wüllner, Lehrb. d. Experimentalphysik. 1. p. 227. Leipzig, 1882

2) Everett, Phil. Trans. 156. p. 191. 1866.

3) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.

4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.

5) Cornu, Compt. rend. 69. p. 333. 1869.

6) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510. 1882.

7) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 513. 1882.

8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.

9) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 365. 1889.

10) Cantone. Amagat, l. c. p. 366.

11) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 313. 1889.

12) Kowalsky, Wied. Ann. 39. p. 155. 1890.

13) Mercadier, Compt. rend. 105. p. 105. 1887.



Auf Grund dieser Zahlen und obenerwähnter Formeln sind die von mir nach verschiedenen Methoden ausgeführten Beobachtungen in vollständigem Einklange untereinander; um aber Beweise der Richtigkeit meiner Resultate liefern zu können, wurden noch ganz selbständige Untersuchungen aller elastischen Eigenschaften desselben Glases, welches zur Construction der Piezometer diente, unternommen. Sie werden weiter ausführlich dargestellt.

15. Alle meine Beobachtungen wurden bei stationärem Drucke ausgeführt, sodass der Quecksilberfaden in der Capillare *C* immer auf die alte Stelle zurückkam, was ein Zeichen war, dass das Piezometer keine merkliche Erwärmung und keine permanente Deformation während des Experimentes erlitten hat. Bei den Manipulationen nach Regnault'schen oder nach Jamin'schen Methoden war der Plan ein für allemal der folgende:

a) Ich bestimmte auf der Scala des Luftmanometers mittels des Quecksilbermanometers den einem halben Atmosphärendruck entsprechenden Theilstrich und berechnete darnach, wie schon früher ausführlich beschrieben war<sup>1)</sup>, den Druck, welcher in dieser Untersuchungsreihe von 9,112—9,240 Atmosphären schwankte, je nach der Zimmertemperatur und dem Barometerstand;

b) dann machte ich gleichzeitige Ablesungen: die eine auf der Capillare *C* des Piezometers, die andere an einem Alvergüiat'schen Thermometer, welches bis auf 0,02° C. eingetheilt war; die dritte am Correctionsrohr *I'*, falls ich nach Jamin'scher Methode operirte;

c) ich steigerte langsam, mittels der Pumpe, den Druck bis zum berechneten Theilstrich des Luftmanometers, liess ihn die nöthige Zeit (von 3—5 Minuten) constant zu werden, und las wieder die drei erwähnten Angaben (b);

d) ich verminderte schliesslich den Druck, liess ihn wieder constant werden und las dieselben Angaben (b);

e) nach den Angaben von  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\gamma$  berechnete ich den Compressibilitätscoefficienten: der scheinbaren  $\chi_a$ , der kubischen des Wandpiezometers  $\chi$  und der wirklichen  $\chi_v$ . Jeder von den

1) G. de Metz, Wied. Ann. 41. p. 664. 1890.

genannten Coefficienten wurde als Mittel mehrerer Beobachtungsreihen nach obigem Plan bestimmt, und jede Reihe bestand aus vollen zehn Ablesungen; da die Uebereinstimmung der Grössen von  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$ ,  $\gamma$  — bei der Druckvergrößerung bis 9,3 Atmosphären und bei der Druckverminderung bei dem Barometerstand — vollständig war, so nahm ich einfach das arithmetische Mittel derselben.<sup>1)</sup>

Ich möchte meine Beobachtungen mittels folgender zwei Tabellen illustriren.

Tabelle VI.

Beobachtungen nach der Jamin'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 16. IV. 1890;  $P=9,2308$ ;  $W=57756$  mm;  $t=18,80^\circ$  C.

Druck- vergrößerung $\theta_1$	Druck- verminderung $\theta_2$	Druck- vergrößerung $\gamma_1$	Druck- verminderung $\gamma_2$
50,95	50,85	12,40	12,40
50,90	50,90	12,30	12,30
50,80	50,70	12,30	12,40
50,80	50,70	12,45	12,50
50,90	50,50	12,45	12,45
Mittel 50,87	50,72	12,38	12,41

Tabelle VII.

Beobachtungen nach der Regnault'schen Methode.

Piezometer Nr. I; 8. IV. 1890;  $P=9,2400$ ;  $W=57756$  mm;  $t=17,34^\circ$  C.

Druck- vergrößerung $\theta_1'$	Druck- verminderung $\theta_2'$	Druck- vergrößerung $\theta_1''$	Druck- verminderung $\theta_2''$
47,45	47,70	3,20	2,90
47,60	47,60	3,05	3,00
47,40	47,50	3,05	3,00
47,50	47,50	3,10	2,90
47,40	47,40	3,00	3,00
Mittel 47,47	47,54	3,08	2,96

Man sieht also, dass die Angaben von  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ;  $\theta_1'$ ,  $\theta_2'$ ;  $\theta_1''$ ,  $\theta_2''$ ;  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  miteinander gut übereinstimmen und dass die bemerkbaren kleinen Unterschiede ganz durch die Beobachtungs-

1) In meiner früheren Abhandlung unterschied ich diese Fälle; vgl. p. 668—672.

fehler erklärt werden können, ohne dass man mit der Erwärmung oder mit der Abkühlung des Quecksilbers, sowie mit der permanenten Deformation des Piezometers zu thun hätte. In ähnlicher Art und Weise waren alle Beobachtungen zusammengesetzt. Die Werthe von  $\theta$ ,  $\theta'$ ,  $\theta''$  sind gegeben in den Eintheilungen  $\beta$  der Capillare  $C$  (§ 5, d, e) und die von  $\gamma$  in den des Correctionsrohres  $\beta_1$ . Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, inwiefern meine Beobachtungen, im Vergleich zu denen anderer Autoren, empfindlich waren, d. h. welchen Werth das Verhältniss  $\beta$  zu  $W_0$  erreicht hat. Zu diesem Zwecke theile ich meine Zahlen, sowie diejenigen einiger anderer Beobachter mit.

Tabelle VIII.  
Verhältniss  $\beta$  zu  $W_0$ .

Regnault <sup>1)</sup> . . .	$9,39 \times 10^{-6}$
Grassi <sup>2)</sup> . . .	$11,22 \times 10^{-6}$
Dupré und Page <sup>3)</sup>	$4,62 \times 10^{-6}$
Drecker <sup>4)</sup> . . .	$6,40 \times 10^{-6}$
Drecker <sup>5)</sup> . . .	$6,10 \times 10^{-6}$
De Metz I. . .	$4,57 \times 10^{-6}$
De Metz II. . .	$6,01 \times 10^{-6}$
De Metz III. . .	$5,97 \times 10^{-6}$
De Metz IV. . .	$7,97 \times 10^{-6}$

Dieselben zeigen, dass meine Piezometer der Empfindlichkeit nach zu der Kategorie der besten gerechnet werden müssen, insbesondere wenn man darauf achtet, dass der Abstand zwischen je zwei Theilstrichen der Capillare  $C$  1,5 mm betrug, und dass die Schätzung bis auf ein Zehntel mit aller Sicherheit erfolgte. Jetzt führe ich drei Tabellen an, welche meine Beobachtungen umfassen.

1) Regnault, l. c. p. 425.

2) Grassi, l. c. p. 445 (Piezometer 4).

3) Dupré u. Page, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 5. p. 237. 1871.

4) Drecker, Wied. Ann. 20. p. 879. 1883.

5) Drecker, Wied. Ann. 34. p. 954. 1888.

### Piezometer

Piezometer																
T <sup>o</sup> C.	P Atm.	h' cm	h'' cm	θ cm	θ + θ' cm	γ cm	γ <sup>(1), (1')</sup> cm	γ + γ <sup>(1), (1')</sup> cm	Reynault			Jamin		deMetz γ + γ <sup>(1), (1')</sup>	θ' γ + γ <sup>(1), (1')</sup>	
									10 X 10 <sup>7</sup>	11 X 10 <sup>7</sup>	12 X 10 <sup>7</sup>	13 X 10 <sup>7</sup>	14 X 10 <sup>7</sup>			15 X 10 <sup>7</sup>
I	16,759,2308	12,515	0,8240	—	13,3390	—	—	—	15,467	22,847	38,304	—	—	—	39,972	—
	18,469,1619	12,270	0,7797	—	13,0497	—	—	—	14,735	22,668	37,303	—	—	—	—	—
	17,659,2400	12,535	0,7969	—	13,3319	—	—	—	14,932	22,860	37,792	—	—	—	—	—
II	18,409,2094	—	—	13,3150	—	12,292	0,1883	12,480	—	—	—	15,692	38,452	38,658	—	—
	18,809,2308	—	—	13,4043	—	12,442	0,1887	12,631	—	—	—	14,999	37,259	39,748	—	—
	18,659,2267	—	—	13,4088	—	12,437	0,1886	12,626	—	—	—	14,684	37,444	39,950	—	0,991
	20,459,1869	6,3617	0,62008	—	6,9818	—	—	—	13,366	23,615	38,981	—	—	—	—	—
	20,409,1910	6,3312	0,61480	—	6,9660	—	—	—	15,529	23,565	38,794	—	—	—	—	—
	20,309,1974	—	—	7,0856	—	6,2788	0,0739	6,3527	—	—	—	16,161	39,751	39,617	—	—
	20,309,1974	—	—	7,0846	—	6,2938	0,0739	6,3677	—	—	—	16,508	40,098	40,213	—	1,000
III	20,009,1814	6,2140	0,5277	—	6,7417	—	—	—	12,991	24,480	37,471	—	—	—	—	—
	19,609,1707	6,2061	0,5277	—	6,7338	—	—	—	13,008	24,477	37,485	—	—	—	—	—
	18,059,1869	—	—	6,7087	—	5,9675	0,0870	6,0345	—	—	—	16,093	40,572	36,726	—	—
	18,159,1744	—	—	6,7022	—	5,9422	0,0869	6,0294	—	—	—	16,573	41,052	36,731	—	1,028
IV	20,159,1666	3,7864	0,44725	—	4,2336	—	—	—	14,736	24,601	39,337	—	—	—	—	—
	19,109,1666	3,7864	0,40685	—	4,1927	—	—	—	13,889	24,601	37,990	—	—	—	—	—
	19,759,2019	3,7587	0,43406	—	4,1927	—	—	—	14,245	24,367	38,612	—	—	—	—	—
	19,709,2019	—	—	4,2368	—	3,6358	0,04174	3,6935	—	—	—	17,770	42,271	39,507	—	—
	19,709,2019	—	—	4,2524	—	3,6890	0,04174	3,7307	—	—	—	16,782	41,252	40,036	—	1,019

\* In dieser Columnne ist die elastische Ausdehnung des halbsphärischen Piezometerheftes berechnet, um auch eine Correction der in die Messungstheorie eingeklinkten Halbkugel geben zu können, da wir, wenn aus der nach  $J$  in beobachteten Piezometerausdehnung  $\gamma$  die ganze  $\gamma + \gamma'_{(s, T, J)}$  erhalten werden soll, zu  $\gamma$  den berechneten Werth  $\gamma'_{(s, T, J)}$  addiren müssen.

IX

IX

IX

IX

Wir bekommen also aus der Tabelle XI bei 0° nach der Methode von

Regnault	$\chi_v = 36,75 \times 10^{-7},$
Jamin (corr.)	$\chi_v = 37,86 \times 10^{-7},$
De Metz	$\chi_v = 37,71 \times 10^{-7},$

und als Mittel nach allen Methoden

$$\chi_v = 37,37 \times 10^{-7} \text{ bei } 0^\circ.$$

Aus der Tabelle (X) erhält man bei 19,38° C. nach der Methode von

Regnault	$\chi_v = 38,20,$
Jamin (corr.)	$\chi_v = 40,05,$
De Metz	$\chi_v = 39,01,$

was als Mittel gibt

$$\chi_v = 39,08 \text{ bei } 19,38^\circ \text{ C.}$$

Folglich wächst die Quecksilbercompressibilität mit der Temperatur und der Coefficient dieser Zunahme  $\Delta\chi_v$  auf 1° C. berechnet ist

$$\Delta\chi_v = 87,7 \times 10^{-10},$$

sodass zwischen den Temperaturgrenzen meiner Beobachtungen die absolute Compressibilität des Quecksilber durch die Gleichung (XI)

$$\chi_v = 37,4 \times 10^{-7} + 87,7 \times 10^{-10} t$$

dargestellt wird, in welcher  $t$  die Temperatur von 0°—19,4° C. bedeutet. Das letzte Resultat habe ich verglichen mit einer thermodynamischen Formel von A. Dupré<sup>1)</sup>, welche schon früher von Hrn. Amagat<sup>2)</sup> geprüft wurde und mit seinen Beobachtungen gut übereinstimmte. Diese Formel lautet

$$A = 10\,333(274 + t) \frac{\alpha}{\chi_v},$$

wenn  $\alpha$  den Coefficienten der thermischen Ausdehnung der Flüssigkeit,  $\chi_v$  den der absoluten Compressibilität,  $274 + t = T$  die absolute Temperatur bedeutet. Was die Grösse  $A$  (l'attraction au contact) anbetrifft, so stellt sie Dupré gleich dem Producte  $\alpha A^2$ , in welchem  $A$  das specifische Gewicht und  $\alpha$  eine besondere von der chemischen Natur des Körpers abhängende

1) A. Dupré, *Théorie mécanique de la chaleur*. p. 147 ff. Paris, 1869.

2) Amagat, *Ann. de chim. et de phys.* (5) 11. p. 536. 1877.

Constante ist. Betrachten wir einen und denselben Körper bei verschiedenen Temperaturen und Druckverhältnissen, so bleibt  $\alpha$  unveränderlich, und die Werthe von  $\alpha$ ,  $T$ ,  $\chi_v$ ,  $\Delta$  gehen in die  $\alpha'$ ,  $T'$ ,  $\chi'_v$ ,  $\Delta'$  über; vermittels dieser Grössen bildet man die folgende Gleichung

$$\chi'_v = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\Delta^3}{\Delta'^3} \cdot \chi_v,$$

welche den Coefficienten  $\chi'_v$  bei der Temperatur  $t'$  zu berechnen erlaubt, wenn der Coefficient  $\chi_v$  bei einer anderen Temperatur  $t$  bekannt ist. Setzt man  $\chi_v = 37,4 \times 10^{-7}$  bei  $0^\circ$ , so erhält man bei  $19,4^\circ$   $\chi'_v = 40,2 \times 10^{-7}$ , eine Zahl, die nahe der aus dem Experimente gefundenen  $39,1 \times 10^{-7}$  ist.

16. Ich möchte noch die Data meiner Vorgänger hier anfügen, um sie mit meiner Zahl zu vergleichen; einige von diesen Zahlen müssen vorläufig corrigirt werden nach den Erfordernissen der Elasticitätstheorie, sie sind mit Asterisken bezeichnet; die Reduction zu  $0^\circ$  C. wurde mittels meines Coefficienten  $\Delta\chi_v$  gethan, sie ist mit zwei Asterisken bezeichnet.

Tabelle XII.

Absolute Compressibilitätscoefficienten des Quecksilbers nach verschiedenen Autoren.

Colladon et Sturm* <sup>1)</sup> .	$35,2 \times 10^{-7}$	Tait <sup>5)</sup> . . . . .	$36,0 \times 10^{-7}$
Aimé** <sup>2)</sup> . . . . .	$39,0 \times 10^{-7}$	Amagat** <sup>6)</sup> . . . . .	$39,0 \times 10^{-7}$
Regnault <sup>3)</sup> . . . . .	$35,2 \times 10^{-7}$	De Metz. . . . .	$37,4 \times 10^{-7}$
Amaury et Descamps*** <sup>4)</sup>	$38,6 \times 10^{-7}$	Mittel	$37,9 \times 10^{-7}$

Wir überzeugen uns also, dass die alten Beobachtungen sich den neuesten nähern, falls sie der Elasticitätstheorie gemäss geordnet werden.

1) Colladon et Sturm, Ann. de chim. et de phys. **36**. p. 137—139. 1827.

2) Aimé, Ann. de chim. et de phys. (3) **8**. p. 268—270. 1843.

3) Regnault, l. c. p. 461.

4) Amaury et Descamps, Compt. rend. **68**. p. 1564. 1869; auch Descamps, Etudes de la compressibilité des liquides. Thèses de doctorat. **4<sup>e</sup>**. p. 24—26. Paris, 1872.

5) Tait, Beibl. **13**. p. 442. 1889.

6) Amagat, Journ. de phys. (2) **8**. p. 203. 1889.



17. Wenden wir uns nun zur Vergleichung der nach der Methode von Regnault und von Jamin erhaltenen Zahlen:

Piezometer	nach Jamin	nach Regnault
I	$\chi_a = 14,96 \times 10^{-7}$	$\chi_v = 37,80 \times 10^{-7}$
II	$16,33 \times 10^{-7}$	$38,89 \times 10^{-7}$
III	$16,33 \times 10^{-7}$	$37,47 \times 10^{-7}$
IV	$17,24 \times 10^{-7}$	$38,65 \times 10^{-7}$
Mittel $16,22 \times 10^{-7}$		$38,20 \times 10^{-7}$

so müssen wir eine derselben fallen lassen, da zwei abweichende Antworten auf eine Frage einander ausschliessen. Welche aber? Gewiss die Jamin'sche, weil die Data nach seiner Methode nicht bloss denen widersprechen, welche nach der theoretisch entwickelten Regnault'schen Methode erhalten werden, sondern auch den Daten von Hrn. Tait<sup>1)</sup> und Amagat<sup>2)</sup>, in welchen die kubische Wandcompressibilität des Piezometers ohne irgend eine theoretische Betrachtung bestimmt wurde. Um aus dem obenerwähnten Jamin'schen Coefficienten  $\chi_a$  den Coefficienten  $\chi_v$  abzuleiten, ist es erforderlich, zu  $\chi_a$  den Coefficienten  $\alpha$  zu addiren; dann:

$$\text{nach Jamin (corr.) } \chi_v = 40,0 \times 10^{-7},$$

$$\text{nach Regnault } \chi_v = 38,2 \times 10^{-7}.$$

Obgleich diese Zahlen nicht absolut zusammenfallen, sind sie doch einander so nahe, wie man es nicht genauer verlangen kann: 1. wenn man nach verschiedenen Methoden operirt; 2. wenn man eine so geringe Wirkung, wie die Compressibilität des Quecksilbers, misst; 3. wenn man beachtet, dass die Form des Piezometers (Tabelle II, III, IV) nicht streng geometrisch war, wie es die Theorie verlangt.

Piezometer	nach Regnault	nach Jamin
I	$\chi_a = 15,0 \times 10^{-7}$	$\chi_v = 15,0 \times 10^{-7}$
II	$15,3 \times 10^{-7}$	$16,3 \times 10^{-7}$
III	$13,0 \times 10^{-7}$	$16,3 \times 10^{-7}$
IV	$14,1 \times 10^{-7}$	$17,2 \times 10^{-7}$
Mittel $14,4 \times 10^{-7}$		$16,2 \times 10^{-7}$

1) Tait, Beibl. 14. p. 707. 1890.

2) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 359. 1889.

Wollen wir weiter gehen, so machen wir auf die Columnen 10 und 13 der Tabelle X aufmerksam, welche die Werthe von Coefficienten  $\chi_a$  nach Regnault und nach Jamin enthalten; sie stimmen untereinander mit der Genauigkeit der soeben gegebenen Zahlen von  $\chi_v$  überein. Dass wir betreffs der Regnault'schen und Jamin'schen Methoden wirklich auf einem richtigen Standpunkte stehen, lässt sich noch mittels der Columnen 15 und 16 derselben Tabelle X beweisen; in der Columnen 15 sind nach der in § 11 beschriebenen Methode die Coefficienten  $\chi_v$  berechnet, welche der absoluten Bedeutung nach zwischen den nach Regnault und nach Jamin (corr.) gefundenen Coefficienten  $\chi_v$  stehen. Endlich enthält die 16. Columnen das Verhältniss  $\theta' / \gamma + \gamma(\frac{1}{2}v_0)$ , welches, der Gleichung (X) entsprechend, der Einheit gleich werden soll. Dieses theoretische Resultat ist ganz gerechtfertigt, da im Mittel die Differenzen zwischen berechneten und beobachteten Werthen kaum 1 Proc. erreichen.

Piezometer	$\theta'$
	$\gamma + \gamma(\frac{1}{2}v_0)$
I	0,991
II	1,000
III	1,028
IV	1,019
Mittel 1,0095	

18. In allen vorigen Berechnungen richtete ich mich nach den vereinfachten Formeln ein, bei der Annahme  $\lambda = \mu$ ; obgleich ich dieselben durch eine Zahlenreihe (Tabelle V) für die gläsernen Piezometer zu rechtfertigen suchte, hielt ich es doch für unentbehrlich, den Coefficienten der kubischen Wandcompressibilität  $\kappa$  ganz unabhängig von dem Regnault'schen Verfahren zu bestimmen. Deswegen blieb ich bei der Methode stehen, welche als die beste in diesem Falle betrachtet werden muss, nämlich bei der Methode der Biegung und der Torsion der Piezometerrohre. Sie ist so bekannt, dass ich mit Stillschweigen ihre Theorie übergehe und nur in einigen Worten die Details meiner Experimente beschreiben will.

Mein Apparat bestand aus der massiven gusseisernen Bank, 105 cm lang, welche auf vier Schrauben *FI* (Fig. 16) lag; ihr Obertheil hatte der ganzen Länge nach einen Schnitt, in

welchem man die gusseisernen Vorrichtungen  $b$ ,  $c$  (Fig. 14) bewegen oder mittels der Schrauben festklemmen konnte. Die Vorrichtung  $b$  ist ausführlich auf der Fig. 15 dargestellt; sie bestand aus einem dicken gusseisernen rechtwinkligen Stück, welches mit der Schraube  $d$  an die Bank angeklemt werden konnte und trug ein Plättchen  $e$  mit der Schraube  $h$ . Dieses Plättchen war beweglich in drei rechtwinkligen Richtungen  $x, y, z$  (Fig. 17) und endete in einem prismatischen Messer, worauf das untersuchte Rohr lag. Der Theil  $c$  wurde besonders solid gemacht; er hatte eine Durchbohrung, in die eine Messinghülse  $F$  eingepasst war; dieselbe diente zum Einkitten des untersuchten Rohres und war mit dem Theile  $c$  fest zusammengeklemt. Der ganze Apparat war sehr kräftig gebaut, und während der Experimente bemerkte man weder Erschütterungen noch Verschiebungen.

19. Vermittels der Versuche über die Biegung und die Torsion der Piezometerröhre bestimmte ich bei Zimmertemperatur von  $15-17^{\circ}$  C. folgende Elasticitätsconstanten: den Young'schen Modul  $E$  und die Lamé'sche Constante  $\mu$ , deren Beziehung zu den Constanten  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$  durch die Gleichungen (1), (2), (3) gegeben ist.

Um den Modul  $E$  finden zu können, wurde das Rohr horizontal auf zwei gleichen Unterlagen  $b$ ,  $b$  freigelegt (in der Fig. 14 ist nur eine derselben gezeichnet; in diesem Falle functionirte der Theil  $c$  durchaus nicht) und mit zwei Messingringen  $m$ ,  $m$ , sowie mit einer Schale  $q$  für die Gewichtsstücke versehen. Die Ringe  $m$ ,  $m$  trugen zwei Spiegel  $r$ ,  $r'$  mit drei Schrauben zum Reguliren; diese Spiegel standen senkrecht zur Rohrxaxe und drehten sich in einer horizontalen Ebene.

Aus der Durchbohrung des Theiles  $c$  nahm man die Messinghülse  $F$  weg (Fig. 14), um eine in je 2 mm mit der Perreaux'schen Maschine eingetheilte Scala in der Ebene  $yz$  (Fig. 17) zu befestigen. In derselben Ebene wurden die beiden Spiegel einander gegenüber eingestellt, sodass ein Lichtstrahl, welcher von der Scala  $s$  (Fig. 16) zum Spiegel  $r'$  ging, sich in  $r'$  reflectirte, dann zum Spiegel  $r$  zurückging und nach der zweiten Reflexion endlich in das Fernrohr  $L$  traf. In diesem Verfahren der Winkelablesung bin ich Hrn. König<sup>1)</sup> gefolgt und es hat sich sehr

1) König, Wied. Ann. 28. p. 108. 1886.

bequem erwiesen. Es war nur der Abstand zwischen der Scala  $s$  und dem Spiegel  $r'$  bei meinen Experimenten viel kürzer, da die grossen Abstände die Schätzungen einer Eintheilung der Scala wenig empfindlich machen. In diesen Untersuchungen waren die Abstände im Mittel folgende: der Scala  $s$  von dem ersten Spiegel  $r$  ca. 6—7 cm, von dem zweiten  $r'$  ca. 90 cm; der beiden Messer voneinander ca. 85 cm. Wenn man durch  $d$  die beobachtete Verschiebung der Scala bezeichnet, so wird die Tangente des Biegungswinkels  $\varphi$  mittels der folgenden Gleichung bestimmt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{2(2sr' + rr')} = \frac{d}{D},$$

die Grösse  $D$  änderte sich von 565 cm bis 583 cm. Mit Hilfe des Winkels  $\varphi$  berechnete man die Biegung  $f$  nach der Beziehung  $f = l/3 \operatorname{tg} \varphi$ , in welcher  $l$  den Abstand der beiden Messer bezeichnet, und endlich den Modul  $E$  nach der Formel

$$E = \frac{1}{f} \frac{P \cdot P}{12 \pi (R_1^4 - R_0^4)}.$$

Hier sind  $f$  und  $l$  schon bekannt;  $R_1$  und  $R_0$  sind der innere und äussere Radius des untersuchten Rohres,  $P$  das Gewicht (von 0,5 kg bis 2 kg) sammt der Schale. Die Biegung  $f$  erreichte per 1 kg Belastung nur ca. 0,5 mm, und man bemerkte weder elastische Nachwirkung noch Abweichungen von der Proportionalität zwischen  $d$  und  $P$ ; die Schätzung bis auf ein Zehntel der Scalentheilung ging nicht ohne Schwierigkeiten vor sich und verlangte Vorsicht und Aenderung der Einstellung. Jedes Resultat in folgender Tabelle ist das Mittel mehrerer Beobachtungsreihen, nicht weniger als fünf, und jede Reihe bestand aus zehn gleichzeitigen Messungen für jedes Gewicht, bei seinem Auflegen und seinem Aufheben.

Tabelle XIII.

Dimensionen von  $R_1$  und  $R_0$  der Piezometerröhre und des Young'schen Modul.

Nr.	$R_1$	%	$R_0$	%	$e$	$f$ pr. 1 kg	$E$
	mm		mm		mm	mm	kg/qmm
I	10,407	2	8,955	2	1,452	0,467	7277
II	9,505	2	7,412	3	2,093	0,495	7300
III	10,000	5	7,660	7	2,340	0,408	6892
IV	9,097	1	6,387	1,5	2,710	0,510	7032
V	9,875	3	6,838	3	3,037	0,348	5663

In derselben Tabelle sind die Dimensionen der Radien  $R_1$  und  $R_0$  der Ringe aus beiden Enden jedes Rohres gegeben und nach obenerwähntem Verfahren (§ 6) bestimmt; neben den Columnen  $R_1$  und  $R_0$  sind die Schwankungen derselben in Procenten angegeben, wenn man von einem Ende bis zum anderen übergeht. Diese Daten bieten ein grosses Interesse dar, denn sie zeigen, inwiefern die wirkliche Form der Röhre von der geometrischen abwich. Die Röhren Nr. I, II, III, IV wurden aus deutschem Glase (Tabelle I) gemacht, das Rohr Nr. V aber aus französischem Bleiglase; die Röhren Nr. I, II, III, IV sind die Reste von denen, aus welchen meine Piezometer Nr. I, II, III, IV vorbereitet wurden.

20. Um den Torsionsmodul  $\mu$  zu bestimmen, kittete man an das freie Ende des Rohres einen weiten Messingring  $n$  (Fig. 14) von 1,5 cm, welcher einen Hebel  $t = 24,1$  cm mit einer Schale  $q'$  für das Gewicht trug; an das andere Ende setzte man mittels Siegelack die Messinghülse  $V$  an, welche mit der Schraube am Theile  $c$  befestigt wurde. Neben dem Ringe  $n$  brachte man eines der Stücke  $bb$  an, an dessen Plättchen  $e, e$  (Fig. 15) jetzt zwei Rollen  $a, a$  angeschraubt wurden. In solcher Weise ruhte das freie Ende auf diesen Rollen und drehte sich regelmässig bei der Torsion des Rohres. Das Plättchen  $e, e$  mit den Rollen  $a, a$  befand sich so nahe wie möglich an dem Spiegel  $r'$ , um die Biegung unter dem Einflusse des auf dem Hebel  $t$  befindlichen Gewichtes zu verhindern. Der Hebel stand rechtwinkelig zur Rohrxaxe und lag immer in horizontaler Ebene  $xz$  (Fig. 17). Die Ringe  $m, m$  sind auf der alten Stelle geblieben, aber die Spiegel wurden um  $90^\circ$  gedreht aus der Ebene  $zy$  in die Ebene  $xy$  (Fig. 17). Ich beobachtete die Torsionswinkel der beiden Enden nach Poggendorff's Methode mit zwei Fernröhren im Abstände von 1 m; in diesen Experimenten drehte sich der Spiegel  $r'$  nicht mehr als auf ca.  $0,55^\circ$  pro 1 kg Belastung, der Spiegel  $r$  aber nur um ca. 5 Proc. dieser Verschiebung. Es wurden, wie früher, Belastungen von 0,5 kg bis 2 kg benutzt, ohne dass eine elastische Nachwirkung bemerkt wurde. Ich glaube, dass der Grund dieses günstigen Umstandes in der Geringfügigkeit der hervorgerufenen Deformation besteht.

Bei allen Untersuchungen dieser Art muss man, wie be-

kannt, sehr vorsichtig sein betreffend der äusseren Störungen, speciell wenn man die Gewichte auf die Schale legt oder dieselben abnimmt; um diese Erschütterungen möglichst zu vermeiden, habe ich immer bei Biegung oder Torsion diese Manipulation vermittels besonderer Rollen und einer Schnur gethan, ohne das Fernrohr zu verlassen. Es hat sich dies auch sehr zweckmässig erwiesen; ich beobachtete thatsächlich, dass die Verschiebungen beider Arten frei und ruhig vor sich gingen und dass das untersuchte Rohr genau auf seinen Scalenstrich zurückkehrte. Bei verschiedenen Belastungen war der Proportionalitätsfactor zwischen dem Torsionswinkel  $\theta$  und dem Gewichte  $P$  nicht streng constant. Die Abweichung erreichte bis 3 Proc. Leider verhinderte mich eine Augenkrankheit diese Untersuchung weiter auszudehnen. In der beigelegten Tabelle sind die Resultate betreffend die Torsionsconstante  $\mu$  zusammengestellt nach der Formel

$$\mu = \frac{2 l C}{\theta \pi (R_1^4 - R_0^4)},$$

in welcher  $C = t P$  das Torsionsmoment,  $l$  den Abstand zwischen den beiden Spiegeln  $r, r'$  bedeuten; die anderen Grössen sind schon bekannt. In derselben Tabelle sind die Werthe der Poisson'schen Constante  $\sigma$  angeführt, welche mittels der bekannten Bezeichnung

$$\frac{E}{\mu} = 2(1 + \sigma)$$

bestimmt werden.

Tabelle XIV.

Torsionsmodul  $\mu$  und Poisson's Constante  $\sigma$ .

Nr.	$\theta$ pro 1 kg	$\mu$ in kg	$\sigma$
I	0,491 <sup>o</sup>	2960	0,290
II	0,517	2930	0,245
III	0,447	2796	0,232
IV	0,538	2841	0,588
V	0,383	2291	0,236

Es bleibt mir jetzt übrig auf Grund der letzten zwei Tabellen den Coefficienten  $\alpha$  zu berechnen nach der Formel

$$\alpha = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E} 0.010333,$$

indem man den Druck nicht in kgr pro qmm, sondern in Atmosphären ausdrückt.

Tabelle XV.

Kubische Compressibilität  $\alpha$  der Röhre und des Piezometers.

Nr.	n. d. Form. $\alpha = \frac{3(1-2\sigma)}{E}$	n. Regnault bei $\lambda = \mu$	Differenzen
I	$23,0 \times 10^{-7}$	$22,7 \times 10^{-7}$	$-0,3 \times 10^{-7}$
II	$21,6 \times 10^{-7}$	$23,6 \times 10^{-7}$	$+2,0 \times 10^{-7}$
III	$24,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+0,4 \times 10^{-7}$
IV	$23,1 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+1,4 \times 10^{-7}$
V	$28,9 \times 10^{-7}$	—	—

Wir können denselben Coefficienten  $\alpha$  noch einmal berechnen mittels der Angaben von  $\theta'$  der Tabelle X nach der Gleichung (V), in welcher  $\mu$  und  $\sigma$  aus der Tabelle XIV,  $\lambda$  aber aus der Beziehung (3) entnommen sind; den in dieser Weise berechneten Coefficienten wollen wir kurz bezeichnen  $\alpha$  bei  $\lambda \neq \mu$ .

Tabelle XVI.

Kubische Compressibilität der Piezometer nach Regnault bei  $\lambda = \mu$  und bei  $\lambda \neq \mu$ .

Nr.	$\lambda = \mu$	$\lambda \neq \mu$	Differenzen
I	$22,7 \times 10^{-7}$	$24,1 \times 10^{-7}$	$+1,4 \times 10^{-7}$
II	$23,6 \times 15^{-7}$	$24,0 \times 10^{-7}$	$-0,4 \times 15^{-7}$
III	$24,5 \times 15^{-7}$	$25,8 \times 10^{-7}$	$-1,3 \times 15^{-7}$
IV	$24,5 \times 10^{-7}$	$25,8 \times 10^{-7}$	$-0,8 \times 15^{-7}$

Die Tabellen XV und XVI zeigen uns, dass die Coefficienten der kubischen Compressibilität der Piezometer — ob sie nach Regnault's Verfahren mit Lamé's vereinfachten Formeln, oder nach soeben beschriebener Methode mit genauen Formeln bestimmt werden — sich nicht mehr als auf eine, Maximum zwei, Einheiten der siebenten Decimale unterscheiden. Eine grössere Uebereinstimmung ist kaum zu verlangen.

Um zu einem definitiven Schlusse zu gelangen, wollen wir eine Vergleichung machen von  $\alpha$  bestimmt nach Regnault, unter der Annahme  $\lambda = \mu$ , und  $\alpha$ , welches den Mittelwerth



von  $\alpha$  darstellt, berechnet nach der Formel  $\mu = 3(1 - 2\sigma)/E$  sowie  $\kappa$ , berechnet nach Regnault, bei der Annahme  $\lambda \neq \mu$  (Gleichung V).

Tabelle XVII.

Kubische Compressibilität der Piezometer bei  $\lambda = \mu$  und  $\lambda \neq \mu$ .

Nr.	Mittel bei $\lambda \neq \mu$	$\lambda = \mu$	Differenzen
I	$23,5 \times 10^{-7}$	$22,7 \times 10^{-7}$	$- 0,8 \times 10^{-7}$
II	$22,8 \times 10^{-7}$	$23,6 \times 10^{-7}$	$+ 0,8 \times 10^{-7}$
III	$25,0 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$- 0,5 \times 10^{-7}$
IV	$24,2 \times 10^{-7}$	$24,5 \times 10^{-7}$	$+ 0,3 \times 10^{-7}$

Wenn wir nun mit Hilfe dieser gut übereinstimmenden Zahlen die absolute Compressibilität des Quecksilbers bei  $\lambda = \mu$  und bei  $\lambda \neq \mu$  noch einmal berechnen (vgl. Tabelle X, Col. 10, 11, 12), so bekommen wir schliesslich eine Tabelle, welche uns ein vollständig befriedigendes Resultat gibt.

Tabelle XVIII.

Absolute Compressibilität des Quecksilbers bei  $\lambda = \mu$  und bei  $\lambda \neq \mu$ .

Nr.	$\chi_v$ bei $\lambda = \mu$	$\chi_v$ bei $\lambda \neq \mu$
I	$37,80 \times 10^{-7}$	$38,54 \times 10^{-7}$
II	$38,89 \times 10^{-7}$	$38,10 \times 10^{-7}$
III	$37,47 \times 10^{-7}$	$38,00 \times 10^{-7}$
IV	$38,65 \times 10^{-7}$	$38,32 \times 10^{-7}$
Mittel	$38,20 \times 10^{-7}$	$38,24 \times 10^{-7}$

## Schluss.

1. Der wahre Compressibilitätscoefficient  $\chi_v$  einer Flüssigkeit ist gleich der Summe der Coefficienten der scheinbaren Compressibilität  $\chi_a$  der Flüssigkeit und der cubischen Compressibilität  $\alpha$  der Piezometerwand, d. h.  $\chi_v = \chi_a + \alpha$ .

2. Die Compressibilitätscoefficienten  $\alpha$  der Piezometerwand, je nach der Art des Glases, ändern sich in gewissen Grenzen. Deswegen müssen sie jedesmal selbständig bestimmt werden, wenn es sich um eine genaue Untersuchung handelt.

3. Die Bestimmungen einer scheinbaren Compressibilität  $\chi_a$  genügen nur dann, wenn die betrachtete Flüssigkeit zur Kategorie der stark compressibeln (z. B. Aether) gehört, und wenn

die Schwankungen der Coefficienten  $\alpha$ , dem absoluten Werthe nach, vernachlässigt werden können, da in der That die mittleren Grenzen derselben sich zwischen  $\alpha = 22 \times 10^{-7}$  und  $\alpha = 28 \times 10^{-7}$  befinden, was wir durch folgende Zahlen veranschaulichen wollen.

Tabelle XIX.

Kubische Compressibilität des gewöhnlichen Glases und Bleiglas.

Name	Bleiglas	$\alpha \cdot 10^7$	Name	Gewöhnliches deutsches Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim <sup>1)</sup>	Baccarat . . . .	28,2	Voigt <sup>9)</sup> . . .	Rheinisches . . .	24,6*
Wertheim <sup>2)</sup>	Choisi-le-Roi . .	26,0*	Kowalsky <sup>10)</sup>	Greiner & Friederichs . . . .	25,3*
Grassi <sup>3)</sup> . .	Choisi-le-Roi . .	28,8*	De Metz . .	Gundelach . . . .	24,6
Everett <sup>4)</sup> . .	Cochran Flint		De Metz . .	Greiner & Cie. .	23,1
	Nr. II . . . . .	29,3*			
Everett <sup>4)</sup> . .	Couper Flint Nr. I	24,9*			
Voigt <sup>5)</sup> . . .	Guinand à Paris	27,5*			
Buchanan <sup>6)</sup>	Unbekanntes . .	29,2			
Tait <sup>7)</sup> . . .	Unbekanntes . .	27,0			
Amagat <sup>8)</sup> . .	Guilbert Martin	24,3			
De Metz . .	Französisches . .	28,9			
		Mittel 27,4	Mittel 24,4		

Name	Gewöhnliches franz. Glas	$\alpha \cdot 10^7$
Wertheim	Fensterglas von St. Quirin	19,5
und	von Cirey . . . . .	22,0
Chévandier	von Valéristhal . . . .	22,4
Regnault <sup>11)</sup>	Unbekanntes . . . . .	23,7
Grassi <sup>12)</sup> . .	—	22,6
Amagat <sup>13)</sup> . .	Guilbert Martin . . . .	22,2

Mittel 22,1

\* Die Zahlen, welche mit Asterisken bezeichnet sind, wurden von mir berechnet.

1) Regnault, l. c. p. 434.

2) Wertheim, Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes.

Extrait des Ann. de chim. et de phys. (3) 23. p. 21. 1848.

3) Grassi, l. c. Piezomètre A; berechnet bei der Annahme  $\lambda = \mu$ 

4) Everett, Phil. Trans. 158. p. 369. 1868.

5) Voigt, Wied. Ann. 15. p. 510—513. 1882.

6) Buchanan, Beibl. 5. p. 172. 1881.

7) Tait, Beibl. 14. p. 707. 1890.

8) Amagat, Journ. de phys. (2) 8. p. 362—365. 1889.

9) Voigt, l. c.

10) Kowalsky, Wied. Ann. 36. p. 309—313. 1889.

11) Regnault, l. c. p. 454—461.

12) Grassi, l. c. Piezomètres B et D.

13) Amagat, l. c. p. 362. 365.

4. Eine Vergleichung der Flüssigkeitscompressibilitäten, welche mit verschiedenen Piezometern bestimmt wurden, ist nur dann möglich, wenn man mit dem absolutem Coefficient  $\chi_v$  und nicht mit dem scheinbaren  $\chi_a$  rechnet.

5. Die von Jamin gegebene Methode ist gleich der ersten Phase der Regnault'schen, da man mittels derselben den Coefficienten der scheinbaren Compressibilität  $\chi_a$  bestimmt; sie enthält aber die Angabe des Correctionsrohres  $\gamma = \theta'$ , welche zur Berechnung des Coefficienten  $\alpha$  (Gleichung V) dienen kann.

6. Man könnte voraussetzen, dass die nach der Jamin'schen Methode erhaltenen Coefficienten  $\chi_a$  von der Wanddicke des Piezometers abhängig seien. Die Theorie verlangt es nicht, und das Experiment rechtfertigt die Theorie vollständig.

7. Um nach den Methoden von Regnault und Jamin die übereinstimmenden Coefficienten  $\chi_v$  zu bekommen, erfordert die Theorie, zu dem Jamin'schen Coefficienten  $\chi_a$  den Coefficienten  $\alpha$  hinzuzufügen, und das Experiment bestätigt diesen Schluss vollkommen.

8. Die Substitution der Bedingungsgleichung  $\theta = \theta' - \theta''$  von Regnault durch das Verfahren, welches zur selbständigen Bestimmung des absoluten Coefficienten  $\chi_v$  führt, ist zu empfehlen.

9. Diese Substitution hat ein besonderes Interesse, wenn es sich um wenig compressible Flüssigkeiten handelt, oder um einen Zusammenhang zwischen der Compressibilität und der Temperatur eines Körpers festzustellen.

10. Alle drei erwähnten Methoden der Bestimmung des Coefficienten  $\chi_v$  geben dieselben Zahlen; die vorkommenden Differenzen sind meistens so gering, dass sie — einerseits durch die Beobachtungsfehler, anderseits durch die Formunvollkommenheit der Piezometer — erklärt werden.

11. Die neuesten Untersuchungen von Hrn. Amagat und meine eigenen führen zum unumstösslichen Schlusse, dass in den Studien der Compressibilitätserscheinungen die Elasticitätstheorie die Hauptrolle spielt, und dass sie allein alle einschlägigen Fragen zu erklären fähig ist.

12. Die alten Untersuchungen über die Quecksilbercompressibilität stimmen mit den neuesten ziemlich gut überein,

wenn man einige nothwendige Correctionen anbringt. Daher berücksichtigte ich bei der Herstellung des Mittelwerthes der gegebenen Daten (vgl. die Tabelle XII) die Zahl der Piezometer, die bei den Experimenten angewendet wurden. Soviel mir bekannt ist, benutzten mehr als ein Piezometer nur Hr. Amagat (sieben) und ich (vier); unsere Vorgänger operirten jeder mit je einem Piezometer. Dieser Mittelwerth von  $\chi_v$  ist bei  $0^\circ$   $\chi_v = 37.9 \times 10^{-7}$  und steht sehr nahe meiner Zahl  $\chi_v = 37.4 \times 10^{-7}$  bei  $0^\circ$ .

Indem ich meine Arbeit schliesse, halte ich es für eine meiner angenehmsten Pflichten Hrn. Prof. Dr. Th. Schwedoff, in dessen Laboratorium dieselbe ausgeführt wurde, meinen innigsten Dank zu bezeugen.

Odessa, Phys. Labor. der Univ., im Juni 1892.

## XII. Die Fortpflanzung der Energie durch den Aether; von G. Helm.

Die Gleichungen, durch welche Hertz die Maxwell'sche Theorie ausgedrückt hat, lassen sich durch die *Bewegungsgleichungen eines den Raum stetig erfüllenden Mittels* ersetzen, dessen Volumenelemente in engen Grenzen affinveränderlich sind.

Nennt man nämlich  $u, v, w$  die Verschiebungscomponenten eines solchen Mittels im Orte  $x, y, z$  eines positiven Coordinatensystems, so bestimmen sich die Wirbelcomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  daselbst durch die Gleichungen

$$(1a) \quad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

sodass

$$(2) \quad \frac{\partial 2\xi}{\partial x} + \frac{\partial 2\eta}{\partial y} + \frac{\partial 2\zeta}{\partial z} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$(1b) \quad \begin{cases} \frac{\partial 2\eta}{\partial z} - \frac{\partial 2\zeta}{\partial y} = \Delta u - \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \frac{\partial 2\zeta}{\partial x} - \frac{\partial 2\xi}{\partial z} = \Delta v - \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \frac{\partial 2\xi}{\partial y} - \frac{\partial 2\eta}{\partial x} = \Delta w - \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

die Dilatation des Volumenelementes am Orte  $xyz$ , eingeführt wurde, und  $\Delta$  die Operation  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  anzeigt.

Es bewege sich nun jedes Volumenelement des Mittels nach den Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta u + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k \frac{\partial u}{\partial t} + X_0 + X_1, \\ \kappa \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta v + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - k \frac{\partial v}{\partial t} + Y_0 + Y_1, \\ \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \kappa c^2 \Delta w + \kappa (C^2 - c^2) \frac{\partial \sigma}{\partial z} - k \frac{\partial w}{\partial t} + Z_0 + Z_1, \end{cases}$$

deren letzte Glieder  $X_0$  bis  $Z_1$  Hilfskräfte bezeichnen, über die weiterhin verfügt werden soll, während  $t$  die Zeit darstellt, und  $\kappa$ ,  $h$ ,  $C$ ,  $c$  Grössen bedeuten, die für alle Elemente, welche dem Volumen eines und desselben homogenen Körpers angehören, gleich gross sind. Bezeichnet man noch  $\partial u / \partial t$  mit  $u'$  und in entsprechender Weise die übrigen Ableitungen nach der Zeit, so lassen sich die Gleichungen (1a) und (1b) in Verbindung mit (4) schreiben:

$$(5a) \quad \frac{\partial 2\xi}{\partial t} = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial 2\eta}{\partial t} = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \quad \frac{\partial 2\zeta}{\partial t} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

$$(5b) \quad \begin{cases} \kappa \frac{\partial u'}{\partial t} + h u' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - X_0 - X_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\eta}{\partial x} - \frac{\partial 2\zeta}{\partial y} \right) \\ \kappa \frac{\partial v'}{\partial t} + h v' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} - Y_0 - Y_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\zeta}{\partial x} - \frac{\partial 2\xi}{\partial z} \right) \\ \kappa \frac{\partial w'}{\partial t} + h w' - \kappa C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} - Z_0 - Z_1 = \kappa c^2 \left( \frac{\partial 2\xi}{\partial y} - \frac{\partial 2\eta}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Wir führen endlich die Hertz'schen Bezeichnungen der electrischen und magnetischen Kräfte und Constanten ein durch die Gleichungen:

$$(6a) \quad \begin{cases} a \cdot 2\xi = A\mu \left( L + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\ a \cdot 2\eta = A\mu \left( M + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\ a \cdot 2\zeta = A\mu \left( N + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6b) \quad \begin{cases} b c^2 \cdot 2\xi = L + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ b c^2 \cdot 2\eta = M + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ b c^2 \cdot 2\zeta = N + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(6c) \quad a u' = X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a v' = Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a w' = Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(6d) \quad \begin{cases} b u' = A\varepsilon \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b v' = A\varepsilon \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b w' = A\varepsilon \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases} \quad (6e) \quad \begin{cases} b \frac{k}{\kappa} u' = 4\pi\lambda A \left( X + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \\ b \frac{k}{\kappa} v' = 4\pi\lambda A \left( Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \\ b \frac{k}{\kappa} w' = 4\pi\lambda A \left( Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \end{cases}$$

$$(6f) \quad b \frac{1}{\kappa} X_0 = 4\pi\lambda A X', \quad b \frac{1}{\kappa} Y_0 = 4\pi\lambda A Y', \quad b \frac{1}{\kappa} Z_0 = 4\pi\lambda A Z'.$$

Zu beachten ist nur, dass bei  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  der Strich nicht wie sonst in diesem Aufsätze eine Differentiation anzeigt.

Setzt man in die mit dem Factor  $a$  multiplicirten Gleichungen (5a) und in die mit  $b$  multiplicirten Gleichungen (5b) diese Werthe, so erhält man die Hertz'schen Gleichungen

$$(7) \begin{cases} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, & A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda A(X-X') = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}, & A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi\lambda A(Y-Y') = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, & A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\lambda A(Z-Z') = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \end{cases}$$

wenn über die Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  in folgender Weise verfügt wird:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, A \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4 \pi \lambda A (\varphi - \varphi_0) - b C^2 \sigma = \Phi, \frac{b}{ax} \\ a X_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, a Y_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, a Z_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $q_0$  eine Grösse, die sich innerhalb des von einem homogenen Körper erfüllten Volumens nicht ändert. Mit Hilfe von (2) und (3) folgen aus (6b) und (6c) noch die Beziehungen:

$$(9a) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\Delta\psi,$$

$$(9b) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Delta\varphi + a\sigma'.$$

Die Factoren  $a$  und  $b$  sind miteinander verknüpft durch

$$(10) \quad \frac{a}{b} = c^2 A \mu = \frac{1}{A \varepsilon},$$

sodass die Wahl des einen willkürlich bleibt und von dem angewendeten Maasssystem abhängt. Auch gilt die Gleichung:

$$(11) \quad A^2 \mu z = \frac{1}{c^2}.$$

Ferner sind unsere Constanten  $k$  und  $\kappa$  mit den Elektrizitätsconstanten  $\lambda$  und  $\epsilon$  verbunden durch die Gleichung:

$$(12) \quad \frac{k}{\kappa} = \frac{4\pi\lambda}{g}.$$

Endlich sei bemerkt, dass aus den Gleichungen (4) durch Differentiation und Addition die Beziehung folgt:

[illegible]



und dass durch (10) und (12) der Werth  $\Phi$  umgeformt wird in:

$$(8b) \quad \Phi = \kappa \frac{\partial q}{\partial t} + k(q - q_0) - a \kappa C^2 \sigma.$$

Soll die Function  $q$  wie bei Hertz das electrostatische Potential bezeichnen, so ist nach (9b)

$$(14) \quad \sigma' = 0$$

die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (4) zur Beschreibung derjenigen Erscheinungen ausreichen, die durch die Maxwell'sche Theorie für *ruhende* Körper umfasst werden. In diesem Falle ziehen sich die Bedingungen (8) und (8b) mit (13) zusammen zu

$$\kappa \frac{\partial \Delta q}{\partial t} + k \Delta q = -a \left( \frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} \right),$$

d. h. zur Continuitätsgleichung der electricen Strömung

$$(14b) \quad \frac{\partial}{\partial x} [k(X - X')] + \frac{\partial}{\partial y} [k(Y - Y')] + \frac{\partial}{\partial z} [k(Z - Z')] = \frac{\partial}{\partial t} (\kappa \Delta q).$$

Die vorstehenden Entwicklungen, welche hier nur in den Hauptzügen niedergelegt sind, sodass besonders hinsichtlich der Grenzbedingungen und der physikalischen Bedeutung aller eingeführten Grössen auf die Ausführungen von Hertz<sup>1)</sup> verwiesen werden muss, beweisen, dass an Stelle der Hertz'schen Gleichungen (7) die Gleichungen (4) treten können, also die Bewegungsgleichungen eines elastisch festen Körpers, dessen Dichte  $\kappa$  ist, und in dem sich überall, wo nicht äussere Kräfte auf ihn einwirken, Transversal- und Longitudinalwellen mit den Geschwindigkeiten  $c$  und  $C$  ausbreiten können. Aeussere Kräfte wirken erstens an vereinzelt Stellen ein, nämlich die den electromotorischen Kräften galvanischen, thermischen und chemischen Ursprungs proportionalen  $X_0, Y_0, Z_0$ . Zweitens wirken in allen Volumenelementen die wesentlich vom electrostatischen Potential abhängigen Kräfte  $X_1, Y_1, Z_1$ , denen sich drittens in allen als Leiter bezeichneten Raumgebieten noch reibungsartige Kräfte  $-k u', -k v', -k w'$ , zugesellen.

Die Gleichungen (4) vereinfachen die Auffassung electricer und magnetischer Vorgänge nicht unerheblich, indem sie zu-

1) Hertz, Wied. Ann. 40 u. 41. 1890. Auch „Untersuchungen über die Ausbreitung der electricen Kraft“. p. 208 u. 256. Leipzig 1892,

folge der Gleichungen (6) die als electriche und magnetische Kraft bezeichneten Vektoren bez. durch Geschwindigkeit und Verwindung ersetzen, also durch Begriffe, deren gegenseitige Beziehung der Anschauung verhältnismässig leicht zugänglich ist. Es scheint bei dem jetzigen Zustande der Wissenschaft und Technik nicht belanglos zu sein, dass Versuche solcher mechanischer Vorstellungsweisen der electricchen und magnetischen Erscheinungen, die von der Anschauung leicht verfolgt werden können, durchgearbeitet und allgemein einer Prüfung auf theoretische Zulässigkeit und praktische Brauchbarkeit unterzogen werden.

Es soll hier nicht im Einzelnen die im Uebergang zu den Gleichungen (4) liegende Wendung unserer Vorstellungsweisen über electriche und magnetische Vorgänge entwickelt werden, Ich beschränke mich auf die Gleichungen der electricchen Induction als Beispiel. Die erste der Gleichungen (4) kann unter Rücksicht auf (8) und (8b) geschrieben werden

$$ac^2 \Delta u = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + a \frac{k}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + ac^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{a}{\kappa} X_0$$

oder nach (6c), (12) und (10)

$$ac^2 \Delta u = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{4\pi k}{\epsilon} X + ac^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{4\pi k}{\epsilon} X'$$

Man darf daher, die Integrationen über den ganzen Raum erstreckend, setzen.

$$au = - \int \frac{1}{c^2 \epsilon} \cdot \frac{\lambda(X-X')}{r} d\tau - \frac{a}{4\pi} \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t} \frac{d\tau}{r}$$

oder

$$(15) -au = +A^2 \int \mu \frac{\lambda(X-X')}{r} d\tau + \frac{A^2}{4\pi} \int \epsilon \cdot \mu \frac{\partial X}{\partial t} \frac{d\tau}{r} + \frac{a}{4\pi} \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{d\tau}{r}$$

wo  $r$  die Entfernung des betrachteten Volumenelementes vom Element  $d\tau$  bezeichnet. Die Gleichung (6c) oder

$$(16) \quad X = - \frac{\partial}{\partial t} (-au) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

stellt dann die erste der Inductionsgleichungen dar, was bei den nahen Beziehungen zwischen  $-au$  und der Componente  $F$  des Maxwell'schen Vectorpotentials nicht ausführlicher erörtert zu werden braucht. Die Maxwell'sche Annahme  $\partial F / \partial x + \partial G / \partial y + \partial H / \partial z = 0$  ist nach (3) erfüllt.

Hiernach ist nun während eines stationären Stromes das elastisch feste Mittel nicht in einem Bewegungs-, sondern in einem Spannungszustande, bei welchem die Verschiebungen mittels einer Function  $\varphi$  durch Gleichungen bestimmt sind, deren erste lauten

$$-au = A^2 \int \mu \frac{\lambda(X-X')}{r} d\tau + \frac{a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\sigma d\tau}{r}, \quad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Die Verwindungen ergeben sich dann nach (1a) und zeigen magnetische Kräfte  $LMN$  zufolge der Formeln (6b) an. Jede Veränderung dieser Verwindungen bewirkt nach (5a) Verschiebungsgeschwindigkeiten und daher nach (6c) electriche Inductionskräfte  $XYZ$ , während bei unverändertem Verwindungszustande electriche Kräfte nur durch das electrostatische Potential  $\varphi$  bedingt sind.

Die durch die Gleichungen (6) gegebene Umdeutung der electricen und magnetischen Vektoren in Geschwindigkeits- und Verschiebungsgrößen eines stetig den Raum erfüllenden Mittels ist nicht die einzig mögliche. Wenigstens kann man (abgesehen von den bekannten hydrodynamischen Analogien) für den Fall  $k=0$  die magnetischen Kraftcomponenten  $LMN$  mit den Größen  $\xi, \eta, \zeta$  proportional wählen und die electricen Kraftcomponenten mit  $\Delta u - \partial \sigma / \partial x$ ,  $\Delta v - \partial \sigma / \partial y$ ,  $\Delta w - \partial \sigma / \partial z$ . Aber, wenn das raumerfüllende Mittel als elastisch fester Körper vorgestellt werden soll, wie es für seine Verwendung als Lichtäther geboten erscheint, so müssen die Annahmen ausgeschlossen werden, welche Vektoren, die während stationärer Zustände unveränderlich bleiben, als Geschwindigkeitsgrößen deuten.

Ausser den Gleichungen für die Fortpflanzung der Energie, welche den Ausgangspunkt der vorangehenden Erörterungen bildeten, gehört zur Maxwell-Hertz'schen Theorie noch die Angabe des in der Volumeneinheit für Bewegung ponderabler Massen verfügbaren Energievorrathes:

$$(17) \quad \frac{e}{8\pi} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 + N^2).$$

Wenn dieser Energievorrath in molaren oder molecularen Formen ponderablen Massen zukommen soll, so muss er dem im Vorangehenden allein ins Auge gefassten elastisch-festen

Mittel entzogen werden, was uns wohl nur durch die Annahme reibungsartiger Absorption der Energie mechanisch verständlich wird. Diese Absorption kann der Gleichung (4) zufolge nur von Kräften herrühren, deren  $X$ -Componenten den Betrag ergeben

$$-k u' + X_0 + X_1,$$

das ist nach (8) und (8b)

$$-k u' + X_0 + \frac{x}{a} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{k}{a} \frac{\partial q}{\partial x} - x C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

oder

$$(18) \quad -\frac{k}{a} \cdot (X - X') + \frac{x}{a} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} - x C^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Es liegt nahe, diese absorbirenden Kräfte der Wechselwirkung zwischen den ponderablen Moleculen und dem elastisch-festen Mittel zuzuschreiben. Dies führt zu der gewohnten Vorstellungsweise, nach welcher die Moleculé als Kerne in den Aether eingesprenkt sind, welche die sie treffende Energie theilweise absorbiren. In den dielectricischen Körpern sind diese Kerne so vereinzelt, dass zwischen ihnen die Energiefortpflanzung im elastisch-festen Mittel ungestört stattfinden kann. Die Störung der Energiefortpflanzung in den Leitern könnte man der thermischen Molecularbewegung zuschreiben, indem man sich durch die letztere die Moleculé in so weiten Grenzen bewegt denkt, dass in kurzen Fristen alle Volumentheile wiederholt in den absorbirenden Zustand gerathen.

Um den Werth der in Energie ponderabler Massen umgeformten Aetherenergie auf Grund der hier entwickelten Anschauungen herleiten zu können, steht noch eine Annahme über die Beweglichkeit offen, die man der Substanz, aus der jene Kerne, die ponderablen Moleculé, bestehen, zuzuschreiben hat. Die Anhaltepunkte, welche die Electricität dafür bietet, dürften folgende sein:

Schon um die freie Beweglichkeit der ponderablen Theile durch den festen Aether hindurch zu sichern, ist es zweckmässig die Substanz der Kerne als eine Art zweiten Aggregatzustand des Stoffes anzusehen, der nach den Gleichungen (4) die Energie fortpflanzt. Ein ponderables Molecul bewegen, heisst dann den Zustand des Aethers bewegen, den es erzeugt, oder vielmehr, der es characterisirt, in dem es einzig besteht.

Das ist die Hypothese, die ich 1881<sup>1)</sup> entwickelt habe. Sie gestattet sogleich, die Electric für *bewegte* ponderable Körper zu entwickeln; sie sagt ja wesentlich dasselbe aus, was Hertz zur Grundlage seiner Gleichungen für bewegte Körper macht, nämlich dass die Bewegung der Körper die Kraftlinien mit ihnen fortführt.

Dieselbe Hypothese macht aber auch verständlich, dass kinetische Energie ponderabler Massen als Aequivalent für den absorbirten Energievorrath auftritt. Denn die im Zeitelement  $dt$  mit der Geschwindigkeit  $x'y'z'$  stattfindende Verschiebung des Aetherzustandes, den wir Molecül nennen, hat Uebergang einer mit jener Geschwindigkeit proportionalen Aethermenge aus dem elastisch festen Gebiete in das Gebiet des Molecüls zur Folge, aber bei gleichförmiger Verschiebung auch einen ebenso grossen Uebergang aus dem letzteren in das erstere Gebiet. In den Zeitelementen, in denen sich  $x'y'z'$  ändern, ist die Gleichheit gestört.

Während eines stationären Stromes herrscht nach der hier vorgetragenen Theorie überall im festen Aether ein Spannungszustand. Die während des Stromes nicht-umkehrbar entwickelte Wärme würde also keine mechanische Erklärung finden, wenn nicht jener Spannungszustand von einem Bewegungszustande in einem andern Mittel begleitet ist. Es scheint daher zweckmässig, sich die Substanz der ponderablen Molecüle als flüssigen Aether vorzustellen, wie ich das a. a. O. gethan habe. (Während ich aber 1881 den Inhalt der Gleichung (4) so zu zerlegen versuchte, dass der feste Aether die Erscheinungen der Dielectrica, der flüssige die der Leiter erklärte, gestaltet sich die Theorie durch Benutzung der Gleichungen (4) für beide Fälle einfacher und umgeht gewisse Mängel des älteren Verfahrens.) Inzwischen dürfte ja, besonders durch Poincaré's Ausführungen, die Annahme zweier raumerfüllenden Mittel an Fremdartigkeit viel verloren haben.

Stellt man sich also den Inhalt der Molecüle als verflüssigten Aether vor, der ausser durch innere Druckunterschiede noch durch eine äussere Kraft beschleunigt wird, deren Grösse nach dem Wechselwirkungsgesetze durch den zu (18)

1) Helm, Wied. Ann. 14. p. 149. 1881.

entgegengesetzten Werth gegeben ist, so gelangt man auch zu einer mechanischen Bedeutung der Function  $\varphi$ . Es erweist sich  $k\varphi/a$  als Druck im Gleichgewichtszustande, oder die zwischen festem und flüssigem Aether bestehende Wechselwirkung  $X_1 Y_1 Z_1$  ist die Ursache, dass Druckdifferenzen aufrecht erhalten bleiben.

Die electricische Kraft  $XYZ$  ist also nach (6c) Resultirende zweier Wirkungen; einer kinetischen im festen Aether, die durch  $au', av', aw'$  gemessen wird, und einer potentiellen, einer Ansammlung von Druckdifferenz in den flüssigen Kernen.

Die magnetische Kraft  $LMN$  wird nach (6b) aus den Verwindungen  $\xi \eta \zeta$  im festen Aether und den unzerstörbaren Wirbeln in permanent magnetischen Moleculen gebildet, die das Drillungspotential  $\psi$  verursachen.

Was nun schliesslich den Energiebetrag (17) anlangt, so ist ja hiernach seine Herleitung aus der Aethermechanik nicht unmöglich, aber sie nöthigt zu Annahmen, deren Durchführung erst gerechtfertigt scheint, wenn sich zeigen lässt, dass auch die ausser den electricischen und magnetischen bekannten Formen der Energie nach denselben Grundsätzen herzuleiten sind. Bis dahin hat die unmittelbare Festsetzung des Werthes (17) und der Nachweis seiner mechanischen Möglichkeit die Einfachheit für sich.

Dagegen erscheint die Einführung der Gleichungen (4) und der durch sie ausgesagten Kinematik des elastisch festen Körpers als eine Vereinfachung unserer Anschauungen über electricische und magnetische Vorgänge.

Dresden, October 1892.

**XIII. Zu Herrn Winkelmann's Abhandlung:  
„Ueber die Verwendung und Wirkungsweise des  
Telephons bei electrischen Nullmethoden“<sup>1)</sup>; von  
E. Cohn.**

Unter vorstehender Ueberschrift hat Herr Winkelmann eine Abhandlung veröffentlicht, deren Abschnitte I und II eine Kritik eines Aufsatzes von mir „Ueber die Gordon-Winkelmann'sche Methode zur Messung von Dielectricitätsconstanten“<sup>2)</sup> enthalten.

Auf den Inhalt des Abschnittes II habe ich das folgende zu erwidern: Winkelmann hatte früher erklärt, dass das Verstummen des Telephons, auf welchem die Messung beruht, durch die Gleichheit zweier Capacitäten

$$c_1 = c_2$$

bedingt sei.<sup>3)</sup>

Demgegenüber stellte ich fest, dass die betreffende Gleichung lautet:

$$(A) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},$$

und dass hierin bei Winkelmann's Anordnung die Grössen  $\gamma$  schlecht definirt und Veränderungen unterworfen sind, die dem Beobachter entgehen können, — während sie bei der von mir empfohlenen Gordon'schen Anordnung gut definirt und unveränderlich sind.

In seinem jetzigen Aufsatz erklärt nun Winkelmann meine Bedingung  $A$  für falsch.

Aus seinen Ausführungen kann man die Bemerkung entnehmen, dass ich die Capacität des Telephons nicht berücksichtigt habe, — wenn auch Winkelmann selbst diesen Ausdruck nicht gebraucht. Diese Bemerkung ist richtig. Sie hat

1) Winkelmann, Wied. Ann. **46**. p. 666. 1892.

2) Cohn, Wied. Ann. **46**. p. 135. 1892.

3) Winkelmann, Wied. Ann. **38**. p. 163. 1889. „Der Ton wird ein Minimum, wenn beide Platten  $P$  eine gleich starke Einwirkung von  $Q$  aus erfahren“.



aber nicht die von Winkelmann ihr beigelegte Bedeutung; denn die Einführung der Telephoncapacität ändert in Wahrheit nichts irgendwie wesentliches am Resultat. Wenn Winkelmann zu einem anderen Ergebniss kommt, so ist das lediglich die Folge rechnerischer Irrthümer.

Zum Beweis wird das folgende genügen: Vorausgesetzt werde, dass zwischen dem Telephon und den Platten messbare Influenz nicht stattfindet, und dass das Telephon nebst Zuleitungen symmetrisch sei. Wenn man dann die Capacität des Telephons mit  $c_3$ , seine Ladung mit  $e_3$  bezeichnet und im übrigen die früheren Benennungen<sup>1)</sup> beibehält, so gelten folgende Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} e_1 = c_1(U - V) + \gamma_1(U - V_0) \\ e_2 = c_2(U - V) + \gamma_2(U - V_0) \end{cases}$$

$$(4) \quad e_1 - e_2 = \text{const.}$$

$$(\alpha) \quad e_3 = c_3 \cdot U$$

$$(\beta) \quad e_1 + e_2 + e_3 = \text{const.}$$

(1) und (4) sind die Gleichungen, welche Winkelmann unter gleichen Nummern seiner Rechnung zu Grunde legt, (4) insbesondere ist die von ihm eingeführte Bedingung für das Schweigen des Telephons. Die Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  hingegen fehlen bei Winkelmann.

Bei der Auflösung des obigen Gleichungssystems ist zu beachten, dass je nach der experimentellen Anordnung die Gleichungen bestehen müssen entweder a) für willkürliche Aenderungen von  $V$  und  $V_0$  oder b) für willkürliche Aenderungen von  $V$  und einen festen Werth von  $V_0$ ; — dass hingegen die Aenderungen von  $U$  nicht willkürlich vorgeschrieben werden können, sondern durch eben jene Gleichungen bestimmt sind, und aus ihnen eliminirt werden müssen, wenn man die Beziehungen zwischen den  $c$  und  $\gamma$  finden will.

So ergibt sich folgende Auflösung der Gleichungen:

1) Cohn und Winkelmann, ll. cc. Wied. Ann. 46. — Dass die Potentiale des Telephons und der mit ihm verbundenen Platten, für welche das gemeinsame Zeichen  $U$  benutzt ist, thatsächlich bis auf verschwindende Beträge übereinstimmen, folgt aus einer einfachen Rechnung, die ich glaube unterdrücken zu dürfen.

1. Sei  $c_3 = 0$  gesetzt (mein früherer Ansatz), dann gehen (4), ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) über in:

( $\gamma$ )  $e_1 = \text{const.}, e_2 = \text{const.}$  (meine frühere Bedingung) und es kommt als einzige Forderung:

$$(A) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \text{ (mein früheres Resultat)}$$

und zwar gleichviel, ob man den Fall a) oder b) vor sich hat.

2. Sei  $c_3$  von Null verschieden (genauerer Ansatz), und lasse man

a) für  $V$  und  $V_0$  willkürliche Aenderungen zu, so folgt:

$$c_1 = c_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

Wir wollen bemerken, dass es auch hier auf die  $\gamma$  ebensowohl ankommt, wie auf die  $c$ . Man wird aber diese Anordnung nicht wählen, weil man bei ihr im allgemeinen durch *eine* Einstellung das Gleichgewicht im Telephon nicht herstellen kann. Auch liegt sie weder bei Winkelmann vor, noch bei Gordon, sofern dessen Versuchsschema mit dem Winkelmann'schen vergleichbar sein soll und von mir verglichen ist.<sup>1)</sup>

Hier ist vielmehr

b) nur  $V$  willkürlich veränderlich,  $V_0$  dagegen constant. Dann folgt als einzige Bedingung:

$$(B) \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2}c_2}{\gamma_2 + \frac{1}{2}c_2}.$$

*Alles, was ich aus der Gleichung A geschlossen habe, folgt ebenso aus Gleichung B; nämlich die Nothwendigkeit, dafür zu sorgen, dass die  $\gamma$ , welche in die Messung eingehen, wohl-definirte und unveränderliche Grössen seien, — was sie bei Winkelmann's Anordnung nicht sind.*

Es tritt nur noch der Einfluss der Telephon-Capacität  $c_3$  hinzu. Man könnte ihn in gleicher Weise, wie den der  $\gamma$ , constant und damit unschädlich machen, indem man auch das Telephon in eine metallische und mit den Platten  $a$  und  $e$  (vgl. die Figur II. cc.) verbundene Hülle brächte. Aber die Gleichung B zeigt, dass man bequemer den Einfluss von  $c_3$  unter jede beliebige vorgeschriebene Grenze drückt, indem man ein für allemal mit genügender Annäherung  $c_1 = c_2$  macht.

1) Vgl. Cohn, l. c. p. 137.

So bei richtiger Rechnung. Winkelmann verfährt anders: er lässt die Gleichungen  $(\alpha)$  und  $(\beta)$  fort, operirt mit den übrigen — (1) und (4), — und behandelt im Resultat  $U$  als eine willkürlich vorschreibbare Grösse. So gelangt er dazu, seine Gleichungen (3) und (7) als die Bedingungsgleichungen aufzustellen, die sich nach meinem resp. nach seinem Ansatz für die Coefficienten  $c$  und  $\gamma$  ergeben. Da in diesen Gleichungen aber  $U$  noch vorkommt, so enthalten sie gar nicht die Lösung der Aufgabe. Alles was von  $U$  Winkelmann im Abschnitt II gegen meinen früheren Aufsatz vorgebracht wird, beruht auf diesen Versehen. —

Gegenüber dem Inhalt des Abschnittes I der Winkelmann'schen Abhandlung, soweit er nicht bereits im Vorstehenden seine Erledigung gefunden hat, wünsche ich an dieser Stelle nur wiederholen <sup>1)</sup> zu dürfen, dass sich die kritischen Bemerkungen meiner früheren Mittheilung gegen die Gefahren (ich acceptire diesen Ausdruck gern an Stelle des früher von mir gewählten) der Winkelmann'schen Methode, aber keineswegs gegen die Winkelmann'schen Beobachtungen richten. Dass diese Gefahren nicht nur theoretisch, sondern thatsächlich bestehen, dafür sprechen meines Erachtens die a. a. O. in der Einleitung von mir mitgetheilten Zahlen eines andern Beobachters. Hr. Winkelmann führt aus, dass er sie bei seinen eigenen Versuchen vermieden hat; — daran habe ich nie gezweifelt.

Strassburg i. E., 5. October 1892.

1) Cohn, l. c. p. 135.

**XVI. Ueber Lösung von Natrium-Silikaten; insbesondere auch über einen Einfluss der Zeit auf deren Constitution; von F. Kohlrausch.**

(Aus den Gött. Nachrichten 1892 p. 461 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Alkali, Kieselsäure und Wasser zusammen bilden ein Gebiet von ungewöhnlich grosser Mannigfaltigkeit, auf welchem noch vieles aufzuklären ist. Ich gebe einige aus dem electrischen Leitungsvermögen gewonnene Beiträge.

Eingehend untersucht habe ich das einfach gesättigte Salz  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  oder  $\text{Na}_2\text{O}, \text{SiO}_2$  und eine stark mit Kieselsäure übersättigte Lösung  $\text{Na}_2\text{O}, 3,4\text{SiO}_2$ ; ausserdem einige Mischungen beider miteinander und mit Aetznatron.

Die Lösungen des Polysilikates haben merkwürdige Eigenschaften chemischer Nachwirkung: erstens, wenn man eine concentrirte Lösung verdünnt, so vergeht eine lange Zeit, bis die verdünnte Lösung ein chemisches Gleichgewicht gewonnen hat; man kennt meines Wissens solche Fälle noch nicht. Zweitens, setzt man zu der verdünnten Lösung des Polysilikates Natronlauge, so verstreicht auch hier eine, je nach der seit dem Verdünnen verflossenen Zeit verschieden grosse Frist, bis die Stoffe ins Gleichgewicht kommen. Man hat mehrere ähnliche Erscheinungen in der organischen Chemie verfolgt, einige wenige in der unorganischen, aber diese beziehen sich auf zusammengesetztere Vorgänge.

An dem einfach gesättigten Salz ist von Interesse, dass dasselbe in verdünnter Lösung besser leitet, als alle anderen untersuchten Salze in äquivalenter Concentration, während es in concentrirter Lösung zu den schlechtest leitenden Salzen gehört.

Das übersättigte Salz leitet ebenfalls, aber nur in aller-äusserst verdünnter Lösung, relativ gut; es sinkt mit wachsender Concentration sehr rasch zu kleinen Werthen. Auffällig ist der grosse Einfluss der Temperatur auf das Leitvermögen verdünnter Lösungen, der alle anderen mir bekannten übertrifft.

Für Mischungen von verschiedenem Gehalt an Natron und Kieselsäure fand ich einen Gang, der zu der Annahme führen kann, dass die stärkst übersättigte Verbindung, welche als solche in Lösung existirt, ungefähr mit der Formel  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $2\text{SiO}_2$  zusammenfällt.

Die bekannte, noch nicht ganz aufgeklärte Depression des Leitvermögens nicht neutral reagirender Lösungen in sehr starker Verdünnung zeigt das einfach gesättigte kiesel-saure Natron ebenfalls. Das übersättigte dagegen, obwohl es wie das erstere alkalisch reagirt und das Alkali mit Lakmus und dergleichen zu titiren gestattet, zeigte bis zu den weitesten Verdünnungen (0,0001 gr.-Aeq./Liter) die Depression nicht.

1. Ich gebe in gewöhnlicher Weise die zu den verschiedenen Concentrationen  $m$  beobachteten (theilweise graphisch interpolirten) Leitvermögen  $k$  für  $18^\circ$ ;  $\text{Hg } 0^\circ$  als Einheit.  $m$  bedeutet den Gehalt eines Liters der Lösung an Grammäquivalenten Na. Weiter folgen die molecularen Leitvermögen  $k/m$ . Dann Temperaturcoefficienten  $\Delta k$  für  $1^\circ$  in Theilen von  $k_{18}$ , gemessen zwischen  $18$  und  $26^\circ$ .

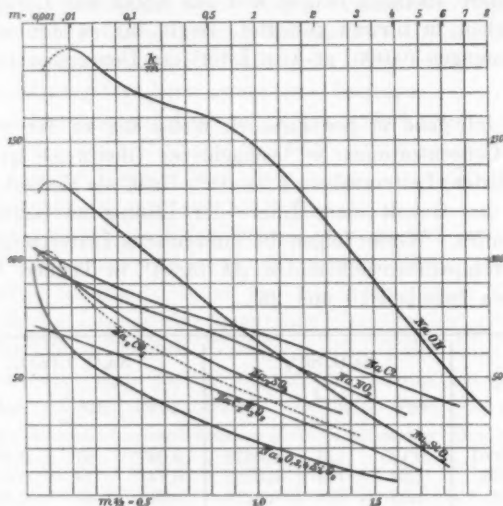
$m$	$\text{Na}_2\text{O}, \text{SiO}_2$			$\text{Na}_2\text{O}, 3,4\text{SiO}_2$		
	10%	$10^7 \frac{k}{m}$	$\Delta k$	10%	$10^7 \frac{k}{m}$	$\Delta k$
0,0001	0,125	125	0,0272	0,097	97	0,0298
0,001	1,34	134	0,0232	0,74	74	0,0298
0,01	12,8	128	0,0214	6,01	60	0,0258
0,1	108	108	0,0220	46,5	46	0,0260
0,5	407	81	0,0236	153	31	0,0278
1	660	66	0,0244	230	23	0,0293
2	960	48	0,0263	298	15	0,0324
3	1050	35	0,0288	295	10	0,0358
4	1010	25	0,0335	250	6	0,042
6	730	12				

Das Leitvermögen  $k$  jedes der beiden Körper hat ein Maximum, nämlich bei dem neutralen Salz  $1055 \cdot 10^{-8}$  für  $m = 3,2$ , bei dem Polysilikat  $300 \cdot 10^{-8}$  für  $m = 2,5$ .

Uebersichtlicher werden die Verhältnisse in dem molecularen Leitvermögen  $k/m$  gegeben. Die Figur stellt das letztere dar, wie früher mit der mittleren Nähe der Molecule  $m^{1/2}$  als

Abscisse (Gött. Nachr. 1885, p. 76). Zum Vergleich sind einige andere Natriumsalze mitgezeichnet (vgl. ebd.).

In dieser Darstellung erscheint das moleculare Leitvermögen von  $\text{Na}_2\text{O}, \text{SiO}_2$  (bis auf die anfängliche Depression) mit anfänglich sehr hohen Werthen als eine fast geradlinige Curve, ähnlich, wie für  $\text{NaCl}$  und  $\text{NaC}_2\text{H}_3\text{O}_2$  und viele andere Electrolyte früher von mir gezeigt wurde. Im Gegensatz dazu gibt das übersättigte Salz  $\text{Na}_2\text{O}, 3,4\text{SiO}_2$  die stärkst gekrümmte Curve, welche für Salze bekannt ist. Die anfäng-



liche Steilheit und die daran sich anschliessende Krümmung übertrifft diejenige für  $\text{MgSO}_4$  und ähnliche Körper erheblich. Der Ausgangspunkt der Curve liegt ebenfalls recht hoch.

Man wird diese Verhältnisse folgendermaassen zu deuten versucht sein. Von dem neutralen Salz würde man nach Analogie als Ionen wohl  $\text{Na}_2$  und  $\text{SiO}_3$  anzusehen haben. Für letzteres eine besonders grosse Beweglichkeit anzunehmen liegt kein Wahrscheinlichkeitsgrund vor. Wenn nun trotzdem bis gegen  $m = 1$  verdünnte Lösungen besser leiten als alle übrigen Natriumsalze, so kann man vermuthen, dass hier  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  wie ein Gemisch von  $\text{NaOH}$  und Polysilikaten wirkt. Aehnliche

Vorstellungen für andere Salze mehrbasischer Säuren im Auge zu behalten habe ich schon früher empfohlen.

In concentrirterer Lösung leitet das Silikat schlecht. In noch höherem Grade gilt letzteres für das Polysilikat: der Ueberschuss von Kieselsäure hindert, theilweise wohl im Zusammenhang mit der ungeheuren mechanischen Zähigkeit der Lösung, die Leitung.

Dass sehr verdünnte Lösungen des Polysilikates wiederum verhältnissmässig gut leiten, kann darauf zurückkommen, dass die gelöste Kieselsäure, die als eine schwache, nach Arrhenius' Theorie wenig dissociirte Säure in stärkerer Lösung wenig leitet, in grosser Verdünnung ein relativ gutes Leitvermögen bekommt, ähnlich wie dies von mir an der Essigsäure und von Ostwald an einer grossen Anzahl schwacher Säuren gezeigt worden ist.

Es mag einstweilen schwierig sein, diese Verhältnisse zu zergliedern, später wird man die Silikate aber vielleicht als besonders lehrreiche Beispiele auf diesem verwickelten Gebiete gebrauchen können.

*Temperatureinfluss.* Derselbe liess sich in den geschlossenen Gefässen mit Thermometer auch für die verdünntesten Lösungen leicht bestimmen, für welche offene Gefässe, wenn die Lösungen alkalisch reagiren, versagen. Der Temperaturcoefficient  $\Delta k$  sinkt von den stärksten Verdünnungen zunächst zu einem Minimum ab, um dann wieder zu steigen, so wie ich dies an vielen anderen Körpern gefunden hatte. Das Polysilikat hat anfangs ungewöhnlich grosse Werthe.

Ich bemerke noch, dass für alle Lösungen das Leitvermögen mit der Temperatur beschleunigt wächst, bei dem übersättigten Salze sowohl in verdünnter wie in concentrirter Lösung erheblich beschleunigt.

2. *Mischungen von Natron und Kieselsäure in verschiedenem Verhältniss.* Lösungen wurden so miteinander gemischt, dass der Natriumgehalt 0,01 gr-Aeq./Liter betrug. Man fand für den gleichzeitigen Gehalt  $m'$  an Aequivalenten  $\frac{1}{2}(\text{SiO}_2)$  das Leitvermögen  $k$  (nach eingetretenem Gleichgewicht; vgl. Nr. 2) und den Temperaturcoefficienten  $\Delta k$



für $m' =$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,034
$10^9 k =$	190	155	122	92	69	64	63	61
$Δk =$	0,0197	203	218	240	272	266	266	260.

Hier sinkt also das Leitvermögen, wenn man zu Natronlösung allmählich Kieselsäure setzt, zuerst stark bis zu etwa  $\frac{3}{8}$  des Anfangswerthes bei  $2\text{SiO}_2$  auf  $1\text{Na}_2\text{O}$ , von da ändert es sich nur wenig. Der Temperatureinfluss steigt bis zu etwa  $2\text{SiO}_2$  und nimmt von da an ein wenig ab. In beiden Beziehungen erfolgt der Durchgang durch den einfach gesättigten Zustand gleichmässig ohne jede Andeutung einer Discontinuität.

Bezüglich der Streitfrage, welche grösste Menge von Kieselsäure in Lösung „mit Natron verbunden existirt“, würde man nach Obigem die Verbindung  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $2\text{SiO}_2$  als obere Grenze vermuthen. Denn die über 0,02 hinaus gelöste Kieselsäure verhält sich ziemlich wirkungslos. Die Verhältnisse müssen freilich noch für andere Concentrationen untersucht werden.

3. *Nachwirkungen bei der Mischung von Alkali und Kieselsäure in Lösung.* Bei der Vereinigung einer Lösung von Aetznatron oder Natriumsilikat mit einer solchen von einem Polysilikat, welches mehr als zwei Aequivalente Kieselsäure enthält, stellt sich im allgemeinen nicht sofort ein Gleichgewichtszustand in der neuen Lösung her. Das anfängliche Leitvermögen ist grösser als der Endwerth, welchen die Lösung nach mehr oder weniger langer Zeit erreicht.<sup>1)</sup>

Die folgenden Beispiele solcher Nachwirkungen beziehen sich auf eine Lösung 0,068 ( $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $1,9\text{SiO}_2$ )<sub>1/2</sub> gr-Aeq./Liter, welche durch Zusammengiessen von  $\text{NaOH}$  mit  $\text{Na}_2\text{O}$ ,  $3,4\text{SiO}_2$  hergestellt wurde. Die Temperatur war 17 bis 18°. Möglichst bald nach gründlichem Durchschütteln der Mischung wurde das Leitvermögen  $k$  gemessen.

Dann fand man, dass  $k$  von einem grossen Anfangswerthe allmählich abnahm, um sich in allen Fällen nahe demselben Endwerthe  $k \cdot 10^9 = 415$  anzunähern. Auf den Anfangswerth und die Geschwindigkeit des Verlaufes war nun der der Mischung

1) Ich habe nach ähnlichen Erscheinungen bei anderen Körpern öfter vergeblich gesucht, z. B. bei Alkalien einschliesslich Ammoniak mit starken Säuren, aber auch mit Essigsäure oder Borsäure. Kaliwasserglas mit Kalilauge zeigt Nachwirkung.

vorausgehende Zustand des zum Aetznatron gebrachten Polysilikates von grossem Einfluss.

Wenn man nämlich in die vorher gebildete verdünnte Lösung von 0,03 NaOH das Polysilikat in Gestalt einer concentrirten Lösung von 3,7 ( $\text{Na}_2\text{O}$ , 3,4  $\text{SiO}_2$ ) $_{1/4}$  brachte, oder auch, wenn der letztere Körper kurz zuvor auf 0,04 verdünnt und nun plötzlich mit der (Normal-)Natronlösung versehen wurde, so sank der anfängliche Ueberschuss des Leitvermögens über den Endwerth rasch ab und war nach 5 Min. schon fast unmerklich geworden.

Hatte die obige verdünnte Lösung 0,04 des Polysilikates vor der Zufügung des Aetznatrons längere Zeit gestanden, so dauerte die Nachwirkung länger und es währte unter Umständen über 3 Stunden, bis der Endwerth erreicht wurde.

Man könnte argwöhnen, dass bei den Nachwirkungen Kohlensäure mitwirke. Ich will daher bemerken, erstens dass zur Verdünnung kohlensäurefreies Wasser genommen wurde, zweitens dass die Lösungen immer mit Ausnahme der zum Mischen nöthigen kurzen Zeit unter dichtigem Verschluss gegen die Luft standen und immer ganz klar blieben.

Die Tabelle gibt den zur Zeit  $t$  seit der Mischung beobachteten mit  $10^9$  multiplicirten Ueberschuss  $x$  des Leitvermögens über den Endwerth. Die Ueberschriften geben die von dem Verdünnen der Polysilikatlösung bis zum Mischen mit NaOH verflossene Zeit. Die erste Reihe ohne Ueberschrift bezieht sich auf den Fall, dass letzterer Körper concentrirt zu der vorher verdünnten Natronlösung gebracht wurde.

$t$		1 min.	27 min.	60 min.	280 min.	500 min.	1100 min.
Min.	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$
0,5	89	46	50	52	82	102	131
1	48	24	32	37	67	91	121
1,5	22	13	21	27	59	84	114
2	11	7,2	16	22	55	80	110
3	2,7	2,4	9,6	16	48	76	106
4	1,2	1,1	6,2	13	46	73	103
7			3,0	8,3	40	67	97
10			1,3	5,5	34	61	92
20				1,8	21	44	75
30				0,8	12	30	59
50					4,0	12	32
100						1,4	6,2
150							2,0

Versucht man die allmähliche Zersetzung des Polysilikates durch das Alkali, welche sich in den Aenderungen des Leitvermögens ausdrückt, in einer Formel darzustellen, so fügen sich die beiden ersten Reihen der einfachen Exponentialform mit einer den Verhältnissen genügenden Genauigkeit. Die erste Reihe nach dem Einbringen der concentrirten Polysilikatlösung wird dargestellt durch

$$x = 175 \cdot e^{-1,33 t}$$

oder

$$-\frac{dx}{dt} = 1,33 \cdot x;$$

die zweite, welche nach dem Hinzufügen von Aetznatron zu der vor 1 Min. verdünnten Polysilikatlösung entstand, durch

$$x = 81 \cdot e^{-1,20 t}$$

oder

$$-\frac{dx}{dt} = 1,20 \cdot x.$$

Dies stimmt also mit der Annahme, dass der jeweilige Abstand des Zustandes der Lösung von dem Endzustande mit einer Geschwindigkeit verschwindet, welche in jedem Augenblicke diesem Abstände selbst proportional ist, und dass die Aenderung des Zustandes durch die Aenderung des Leitvermögens gemessen wird.

Je längere Zeit aber seit der Verdünnung der Polysilikatlösung bis zur Mischung mit NaOH verflossen ist, desto weniger genügt die Exponentialfunction. Das Leitvermögen ändert sich in späteren Zeiten relativ zu langsam. Ja, die Curven für das Alter von 280 bis 1100 Min. zeigen in steigendem Maasse eine ganz geänderte Form. Zuerst fallen sie steil und stark gekrümmt ab, daran schliesst sich ein schwächer gekrümmter, bei 1100 Min von etwa  $t = 7$  bis  $t = 30$  Min. fast geradliniger Theil an und erst gegen den Schluss wieder eine Curve mit asymptotischem Abfall gegen den Endzustand.

Schlüsse werden hieraus vorläufig schwer gezogen werden können. Vielleicht hat man hier mehrere gleichzeitig verlaufende Vorgänge, die einerseits mit dem Alkali, andererseits mit dem Wasser zusammenhängen mögen. Man muss aber auch beachten, dass das Leitvermögen nach § 2 nicht immer einen eindeutigen Aufschluss über Alkali und Kieselsäure in Lösung

zu geben braucht: die Zufuhr von  $\text{SiO}_2$  über einen gewissen Gehalt hinaus änderte das Leitvermögen dort kaum noch.

Die allmähliche Zersetzung des Polysilikates durch Alkali reiht sich an die schon früher studirten<sup>1)</sup>, theilweise verwandten, langsam verlaufenden Vorgänge, wie die Reduction übermangansaure Salze oder die Oxydation von Eisenoxydsalzen, die Katalyse von Estern, die Zersetzung von Acetamid durch Säuren, die Verseifung, die Inversion des Rohrzuckers in Lösungen.

Zweitens aber ergibt sich aus den Beobachtungen noch eine andere Nachwirkung, welche in der Literatur meines Wissens einen nahe verwandten Vorgang nicht findet. Es zeigt sich aus der Tabelle zweifellos, dass die Verdünnung der Lösung des Polysilikates auf dessen Constitution eine Wirkung hat, welche Zeit beansprucht, dass der Gleichgewichtszustand der Theile in der verdünnten Lösung sich erst nach langer Frist herstellt. Je länger die Lösung bestanden hat, desto hartnäckiger widersetzt sie sich nach einem Zusatz von Aetznatron dem zwischen Natrium und Kieselsäure herzustellenden Gleichgewichtszustand. Also hatte die Lösung selbst je nach ihrem Alter einen verschiedenen Zustand, und zwar zeigen 500 und 1100 Min. noch einen erheblichen Unterschied.

Leider ist die so constatirte Veränderlichkeit der verdünnten Polysilikatlösung mit der Zeit nicht oder doch nur sehr unvollkommen durch deren Leitvermögen selbst nachzuweisen. In den ersten fünf Minuten nach der Verdünnung nahm das Leitvermögen allerdings deutlich zu, aber doch nur um etwa 1 Proc.; von da an zeigte sich keine Aenderung weiter.

Ein Widerspruch liegt hierin jedoch nicht, denn stark mit Kieselsäure übersättigte verdünnte Lösungen ändern nach Nr. 2 auch bei weiterem Zusatz von  $\text{SiO}_2$  ihr Leitvermögen kaum noch. In derjenigen Gegend der Mischungsverhältnisse, in welcher diese Beschränkung wegfällt, kann man andererseits die Probe nicht machen, weil die Grenze (2 Aeq.  $\text{SiO}_2$ ),

1) Von Berthelot, Harcourt und Esson, van'tHoff, Hood, Ostwald, Warder, Wilhelmy; vgl. Ostwald, Allg. Chemie.

unterhalb deren die Kieselsäure noch das Leitvermögen ändert, nahe mit derjenigen zusammenfällt, unter welcher die Nachwirkungen ausbleiben. Fügt man z. B. der Lösung von 1,9 Aeq.  $\text{SiO}_2$ , auf welche sich die Tabelle bezieht, nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes weiteres Natron hinzu, so stellte sich sofort ein neues, constantes Leitvermögen her.

Strassburg, Juli 1892.

XV. *Ueber das Verhalten des polarisirten Lichtes bei der Beugung; von G. Quincke.*

Hr. H. E. J. G. du Bois<sup>1)</sup> veröffentlicht in dem Aufsätze „Reflexion und Transmission des Lichtes durch gewisse äolotrope Gebilde“ Versuche über den Durchgang des polarisirten Lichtes durch blanke Silberdrahtgitter, Platinschichtgitter, Glasgitter und über die Reflexion des polarisirten Lichtes an Metallgittern.

Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dass ich eine grosse Reihe ähnlicher Versuche in meinen optischen Experimentaluntersuchungen (Pogg. Ann. 149. p. 273—324. 1873) und in den Göttinger Nachrichten p. 22—32. 1873 beschrieben habe.

Ferner hat Hr. K. Exner<sup>2)</sup> in zwei Abhandlungen über „die polarisirende Wirkung der Lichtbeugung“ ähnliche Versuche über den Durchgang von linear polarisirtem Licht durch Glasgitter veröffentlicht, und eine Uebersicht der früheren Arbeiten auf diesem Gebiete gegeben. Er findet im allgemeinen das Stokes'sche Cosinusgesetz in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen der verschiedenen Beobachter. Mir selbst wird darin der Vorwurf gemacht, ich hätte auf das falsche Licht, welches von Beugungsspectren verschiedener Provenienz herrührte, und welches dem Lichte des beobachteten Spectrums beigemischt gewesen wäre, keine Rücksicht genommen.

Das Letztere ist nicht richtig, da ich den Einfluss dieses falschen Lichtes sehr wohl gekannt habe und meine Messungen an Drahtgittern im durchgehenden Lichte, und an Furchen- oder Hügeltgittern aus Glas, Metall und Silbercollodium im reflectirten Lichte von dieser Fehlerquelle frei waren. Meine Mittheilung in den Göttinger Nachrichten, welche eine Ueber-

1) H. E. J. G. du Bois, Wied. Ann. 46. p. 542. 1892. (Habilitationsschrift).

2) K. Exner, Wien. Sitzungsber. Mathem.-naturw. Classe. 99. Abth. II (10. 7. 1890); 101. Abth. II (11. 2. 1892) p. 8.

sicht der Resultate meiner sämmtlichen Versuche enthält, scheint Hr. K. Exner nicht gekannt zu haben.

Meine zahlreichen Versuche über das Verhalten des polarisirten Lichtes, welches an Beugungsgittern reflectirt worden ist, habe ich im Einzelnen bisher nicht veröffentlicht, da die Resultate sehr complicirt sind. Aber die Gesammtheit meiner Versuche über die Beugung des linear polarisirten Lichtes, im durchgehenden und reflectirten Lichte, zeigt, dass das gebeugte Licht im allgemeinen elliptisch polarisirt ist; dass das Amplitudenverhältniss und der Phasenunterschied der Componenten,  $\mp$  und  $\perp$  zur Beugungsebene polarisirt, mit Form, Abstand und Substanz der Gitterstäbe sich ändert; mit wachsender Wellenlänge und mit wachsendem Beugungswinkel zu- und abnimmt und dass dieser periodische Wechsel sich mehrfach wiederholen kann.

Im allgemeinen habe ich meine Versuche weder mit dem Stokes'schen Cosinusetze, noch mit den theoretischen Betrachtungen von J. Fröhlich u. a., die nach 1873 veröffentlicht worden sind, in Uebereinstimmung gefunden.

Heidelberg, den 15. October 1892.

**XVI. *Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten; Erklärung des Hall'schen Phänomens; von E. Lommel.***

Vorläufige Notiz.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die zu den Stromlinien in einer Platte senkrechten Aequipotentiallinien zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Bringt man die Platte in ein Magnetfeld, so ändern diese Magnetkraftlinien ihre Lage, und damit auch die zu ihnen nothwendig orthogonal bleibenden Stromlinien. Darin liegt die einfache Erklärung des Hall'schen Phänomens.

München, 6. Nov. 1892.



## Verhandlungen

der

## Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Sitzung vom 21. October 1892.

Vorsitzender: Hr. A. KUNDT.

Hr. W. Jäger berichtete auf Grund von gemeinsam mit  
Hrn. D. Kreichgauer angestellten Versuchen

Ueber den Temperaturcoefficienten des Quecksilbers.

Hr. L. Arons sprach dann

Ueber einen Quecksilberlichtbogen.

Mit Versuchen über die Gasentladung beschäftigt, fand ich eine ausserordentlich einfache Methode, einen intensiv leuchtenden, lang andauernden Lichtbogen zwischen Quecksilberelectroden herzustellen, welcher nur verhältnissmässig geringe electromotorische Kräfte zu seiner Unterhaltung erfordert und keine der lästigen Eigenschaften von Lichtbögen zwischen Metallelectroden besitzt.

In den meisten Fällen bediente ich mich zur Herstellung desselben einfacher  $\Omega$ -förmiger Glasröhren von 2 cm Durchmesser und ca. 6 cm Schenkellänge; die Schenkel waren unten geschlossen und mit eingeschmolzenen Platindrähten versehen. An der Biegung war nach oben ein engeres Gasrohr (ca. 0,5 cm. Durchmesser) angesetzt, welches die Form der bei Gasentwicklungsapparaten üblichen Sicherheitsröhren hatte und in ein T-Stück auslief. Durch letzteres konnte der kleine Apparat einerseits mit der Quecksilberluftpumpe, andererseits mit Gasentwicklungsapparaten, Manometer etc. in Verbindung gesetzt werden. Das Quecksilber wurde in die Schenkel bis nahe an die Biegung eingefüllt, sodass ein Zwischenraum von 3—4 cm zwischen den Kuppen blieb; nachdem der Apparat bis zu dem gewünschten Drucke ausgepumpt war, wurde auch das U-förmige Stück des „Sicherheitsrohres“ mit Hg gefüllt, sodass ein kleines Manometer entstand, welches eventuelle Druckänderungen im Innern des Apparates anzeigte.

sicht der Resultate meiner sämtlichen Versuche enthält, scheint Hr. K. Exner nicht gekannt zu haben.

Meine zahlreichen Versuche über das Verhalten des polarisirten Lichtes, welches an Beugungsgittern reflectirt worden ist, habe ich im Einzelnen bisher nicht veröffentlicht, da die Resultate sehr complicirt sind. Aber die Gesamtheit meiner Versuche über die Beugung des linear polarisirten Lichtes, im durchgehenden und reflectirten Lichte, zeigt, dass das gebeugte Licht im allgemeinen elliptisch polarisirt ist; dass das Amplitudenverhältniss und der Phasenunterschied der Componenten,  $\neq$  und  $\perp$  zur Beugungsebene polarisirt, mit Form, Abstand und Substanz der Gitterstäbe sich ändert; mit wachsender Wellenlänge und mit wachsendem Beugungswinkel zu- und abnimmt und dass dieser periodische Wechsel sich mehrfach wiederholen kann.

Im allgemeinen habe ich meine Versuche weder mit dem Stokes'schen Cosinusetze, noch mit den theoretischen Betrachtungen von J. Fröhlich u. a., die nach 1873 veröffentlicht worden sind, in Uebereinstimmung gefunden.

Heidelberg, den 15. October 1892.

#### **XVI. Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien in durchströmten Platten; Erklärung des Hall'schen Phänomens; von E. Lommel.**

Vorläufige Notiz.

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die zu den Stromlinien in einer Platte senkrechten Aequipotentiallinien zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Bringt man die Platte in ein Magnetfeld, so ändern diese Magnetkraftlinien ihre Lage, und damit auch die zu ihnen nothwendig orthogonal bleibenden Stromlinien. Darin liegt die einfache Erklärung des Hall'schen Phänomens.

München, 6. Nov. 1892.

## Verhandlungen

der

## Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

**Sitzung vom 21. October 1892.**

Vorsitzender: Hr. A. KUNDT.

Hr. W. Jäger berichtete auf Grund von gemeinsam mit  
Hrn. D. Krelchgauer angestellten Versuchen

Ueber den Temperaturcoefficienten des Quecksilbers.

Hr. L. Arons sprach dann

Ueber einen Quecksilberlichtbogen.

Mit Versuchen über die Gasentladung beschäftigt, fand ich eine ausserordentlich einfache Methode, einen intensiv leuchtenden, lang andauernden Lichtbogen zwischen Quecksilberelectroden herzustellen, welcher nur verhältnissmässig geringe electromotorische Kräfte zu seiner Unterhaltung erfordert und keine der lästigen Eigenschaften von Lichtbögen zwischen Metallelectroden besitzt.

In den meisten Fällen bediente ich mich zur Herstellung desselben einfacher  $\Omega$ -förmiger Glasröhren von 2 cm Durchmesser und ca. 6 cm Schenkellänge; die Schenkel waren unten geschlossen und mit eingeschmolzenen Platindrähten versehen. An der Biegung war nach oben ein engeres Gasrohr (ca. 0,5 cm. Durchmesser) angesetzt, welches die Form der bei Gasentwicklungsapparaten üblichen Sicherheitsröhren hatte und in ein T-Stück auslief. Durch letzteres konnte der kleine Apparat einerseits mit der Quecksilberluftpumpe, andererseits mit Gasentwicklungsapparaten, Manometer etc. in Verbindung gesetzt werden. Das Quecksilber wurde in die Schenkel bis nahe an die Biegung eingefüllt, sodass ein Zwischenraum von 3—4 cm zwischen den Kuppen blieb; nachdem der Apparat bis zu dem gewünschten Drucke ausgepumpt war, wurde auch das U-förmige Stück des „Sicherheitsrohres“ mit Hg gefüllt, sodass ein kleines Manometer entstand, welches eventuelle Druckänderungen im Innern des Apparates anzeigte.

Die Zuleitung des Stromes geschieht durch die erwähnten Platindrähte; da es sich um Ströme bis zu mehr als 10 Amp. handelte, mussten die Einschmelzstellen gegen eine zu starke Erwärmung durch den Strom geschützt werden. Zu dem Zwecke standen die Schenkel des Apparates in Gläsern mit Quecksilber, in welches die von der Stromquelle kommenden Drähte tauchten. Die demonstrierten Apparate waren von der Pumpe abgeschmolzen; ausserdem waren die das äussere Hg enthaltenden Gläser um die unteren Enden der Schenkel herum geschmolzen und mit kurzen Stützen von geringem Querschnitt versehen, durch welche die Zuleitungsdrähte von der Stromquelle führten. Der so entstandene kleine Apparat (Lampe) war auf einem Holzfusse aufrecht stehend montirt.

Der Lichtbogen kommt zu Stande, wenn man den Apparat mit einer entsprechenden Stromquelle, z. B. einer Batterie von 30 Accumulatoren verbindet, durch Neigen oder Schütteln für einen Augenblick metallischen Contact zwischen dem Hg in den beiden Schenkeln herstellt und den Apparat sodann in verticaler Stellung fixirt.

Da ich in anderem Zusammenhange auf die Erscheinungen zurückkommen muss, gebe ich im Folgenden nur eine kurze Uebersicht der wichtigsten Eigenschaften. Meine Versuche wurden theils mit verschiedenen starken Accumulatorenbatterien, theils mit dem Strome der städtischen Electricitätswerke (105—110 Volt Spannung) angestellt; in den Stromkreis war stets ein Regulirwiderstand eingeschaltet.

Die folgende kleine Tabelle gibt eine Versuchsreihe, bei welcher der Druck nur Bruchtheile eines Millimeters beträgt. Die erste Zeile enthält die Stromstärken, die zweite die Spannungen an den Hg-Electroden:

Amp.	11	9	7	5,5	8	2	1,4	0,8	0,5
Volt	17,5	17	16,5	16	15,8	14	26	28	40

Die Stromstärke 1,4 Amp. war nur zu erhalten, nachdem durch vorhergehende stärkere Ströme eine grössere Menge Hg-Dampf entwickelt, der Druck um einige Millimeter gesteigert war; die schwächeren Ströme dauern nicht an, die Messungen sind unsicher.

Bei allen Stromstärken bis herab zu 1,4 Amp. wird der ganze Querschnitt des Rohres von einem ausserordentlich

intensiven grülich-weissem Lichte erfüllt. Nur in den ersten Secunden besteht über der Kathode, auf welcher ein grüner Lichtfleck herumirrt, ein dunkler Raum; auch dieser wird bald von Licht erfüllt, ohne dass der besonders intensiv leuchtende Fleck auf der Kathode, welcher in beständiger schneller Bewegung bleibt, verschwindet. Bei den geringeren Stromstärken treten bisweilen unregelmässige Schichtungen auf. Besonders bemerkenswerth sind folgende Eigenthümlichkeiten: Trotz des continuirlichen Eindruckes der Lichterscheinung ist die Entladung stets discontinuirlich; die Discontinuität wird leicht durch das Telephon erkannt, welches nebst einem Condensator von grosser Capacität neben den Apparat geschaltet ist. Mit der Discontinuität hängt es zusammen, dass trotz der gemessenen niedrigen Spannung an den Electroden eine fast dreimal so grosse electromotorische Kraft zur Herstellung des Bogens erforderlich ist; 50 Volt. reichen eben dazu hin. Im Gegensatze zu dem gewöhnlichen Kohlenbogen ist die Kathode durchgehends heisser als die Anode; doch hat schon STENGER gezeigt, dass mit abnehmendem Drucke die Temperaturdifferenz der Electroden am Kohlenbogen abnimmt.

Die Anwesenheit von Gasen (Luft, Wasserstoff) ändert die Stromintensitäts- und Spannungsverhältnisse nicht erheblich, so erhielt ich bei 5,1 mm *H*-Druck einen Strom von 8,5 Amp. bei 18 Volt. Dagegen ist die Temperatur eine bei weitem höhere, entsprechend dem Umstande, dass der Lichtstrom nicht mehr den ganzen Querschnitt des Rohres füllt; bei dem eben erwähnten Versuche zog sich nur ein besonders stark leuchtendes Band auf der unteren Seite der Biegung zwischen den nächsten Stellen der Hg-Säulen hin. Nach kurzer Zeit wurde das Glassgefäss so heiss, dass es an einer Stelle eingedrückt wurde. Sehr starke Erhitzung zeigten natürlich auch enge Röhren (0,7 cm Durchmesser) unter sonst völlig gleichen Verhältnissen. Ebenfalls durch übermässige Erhitzung gingen Apparate nach wenigen Augenblicken zu Grunde, welche Zn-Amalgam enthielten; ebenso erging es, wenn Aluminiumdrahtstückchen auf dem Hg schwammen. Günstigere Resultate erhielt ich mit Na-Amalgam. Die Entladung war gleichfalls discontinuirlich; dagegen zeigte sich durchgehends die Anode heisser. Mit Leichtigkeit konnte man hier durch Einschalten

von grösseren Widerständen zu schwächeren Strömen herabgehen. Die Electrodenspannung ist durchgehends niedriger, als beim reinen Hg.

Amp.	6	5	2,6	1,6	0,9	0,6
Volt.	10	10	10,5	12	18	20

Die Na-Linien treten im Spectrum am stärksten an der Kathode auf; der Strom von 0,6 Amp. wurde erst dauernd, nachdem an der Anode die Na-Linien verschwunden waren.

## Tabelle.

## Linienpectrum des Quecksilberlichtbogens.

I. Wellenlänge in Å. E.; II. Bezeichnung der Intensität (1—6);  
III. u. IV. Dasselbe nach KAYSER und RUNGE.

I	II	III	IV	Bemerkungen.
6234	2	—	—	Treten erst nach einigen Secunden auf; nach KAYSER u. RUNGE sind zu erwarten 6595 u. 5906 (Erste Nebenserie $n = 3$ ).
6123	3	—	—	
6072	4	—	—	
5889	5	—	—	
5858	5	—	—	
—	—	5819,1	6	Bei längerem Brennen färbt sich der Untergrund matt grün; möglicherweise finden sich hier noch viel mehr Linien.
5808	3	5804,3	5	
5792	1	5790,5	1	
5787	4	—	—	
5775	4	—	—	
5771	1	5769,5	1	
5754	3	—	—	
5739	6	—	—	
5677	4	—	—	
5477	3	—	—	
5461	1	5461,0	1	Unsicher; jedenfalls sehr schwach.
5446	3	—	—	
5431	3	—	—	
5366	4	5365,3	6	
5355	3	—	—	
5316	4	—	—	Bei längerem Brennen färbt sich der Untergrund matt grün; möglicherweise finden sich hier noch viel mehr Linien.
5122	4	—	—	
5103	5	—	—	
5047	4	—	—	
5027	4	—	—	
4961	5	4959,7	5	
4916	1	4916,4	3	
4370	5	—	—	
4359	1	4358,6	1	
4347	3	4347,6	2	
4338	4	4339,5	4	
4074	3	4078,1	2	
4043	2	4046,8	3	

Genauer untersuchte ich das Spectrum des Hg-Lichtbogens, welches ein Linienspectrum von ausserordentlicher Stärke der Linien ist. Die Schwingungsenergie der charakteristischen Wellenlängen muss also bei dem blendenden Glanze des Bogens eine enorme sein. Mittels eines RUTHERFORD'schen Gitters erhielt ich im Spectrum erster Ordnung ausser den von KAYSER und RUNGE erhaltenen Linien eine grosse Anzahl solcher im Grün und Orange. In der Tabelle gebe ich das Resultat meiner Messungen in ÅNGSTRÖM'schen Einheiten. Eine Linie geringster Intensität, welche KAYSER und RUNGE als unscharf bezeichnen, habe ich nicht beobachtet; dagegen ausser den von ihnen im sichtbaren Spectrum festgelegten 13 Linien noch 20 weitere gemessen.<sup>1)</sup>

Es ist anzunehmen, dass die Reinheit des Spectrums hier allein von der Reinheit des Metalles abhängt, da fremde Gase ausgeschlossen sind, und das Glas nur eine geringe Erwärmung erfährt. Uebrigens konnte man letztere noch vermindern, indem man den ganzen Apparat in ein grosses Glasgefäss mit Wasser setzte. Unter diesen Umständen lasse ich die Lampe mit 9 bis 10 Amp. stundenlang brennen. Ich versuchte über die Temperatur im Inneren des Bogens durch ein Thermometer Kunde zu erhalten, welches durch ein besonderes Ansatzrohr in den Bogen gebracht werden konnte. Trotzdem die Kugel völlig vom Bogen umspült war, stieg das Thermometer nur langsam, erreichte aber bei einem Strome von 5–6 Amp. nach etwa 3 Minuten eine Temperatur, bei welcher sein Quecksilber zu sieden begann. Schliesslich sei noch erwähnt, dass das Licht intensiv genug war, um selbst bei sehr starker Vergrösserung das Spectrum objectiv zu zeigen.

1) Bei der Beobachtung mit einem Glasprisma zeigte sich nach längerem Brennen stets noch eine schwächere rothe Linie, deren Wellenlänge etwa 7110 Å. E. ist.



# Inhalt

zu den Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

	Band 45.	Seite
Sitzung vom 8. Januar 1892 . . . . .		595
Sitzung vom 29. Januar 1892.		
E. Lampe. Nachruf an L. Kronecker . . . . .		595
E. Budde. Nachruf an G. B. Airy . . . . .		601
A. König. Ueber den Helligkeitswerth der Spectralfarben bei ver- schiedener absoluter Intensität . . . . .		604
Sitzung vom 12. Februar 1892 . . . . .		608
Sitzung vom 26. Februar 1892.		
F. Neesen. Ueber Messung von Verdampfungswärmen . . . . .		821
M. Thiesen. 1. Ueber vollkommene Diopter . . . . .		821
2. Ueber die Construction von Dioptern mit gegebenen Eigen- schaften . . . . .		823
	<b>Band 46</b>	
Sitzung vom 11. März 1892.		
F. M. Stapff. Ueber die Zunahme der Dichte der Erde in ihrem Innern . . . . .		169
L. Arons. Versuche über electrolytische Polarisation . . . . .		169
Sitzung vom 25. März 1892.		
Mewes. Ueber Emission und Absorption . . . . .		171
Th. Gross. Ueber die chemische Zerlegbarkeit des Schwefels durch Electrolyse. . . . .		171
E. Budde. Ueber Herstellung todter Räume durch blosse Ver- dunstung, und über die angebliche Capillaritätsspannung von Emulsionsoberflächen . . . . .		173
Sitzung vom 3. Juni 1892.		
Th. Gross. Ueber den Satz von der Entropie . . . . .		517
W. Wien. Ueber die Messung hoher Temperaturen . . . . .		521
Sitzung vom 17. Juni 1892.		
H. W. Vogel. Ueber die neue Methode der vervielfältigenden Photographie in Naturfarben . . . . .		521
A. König. Ein neues Spectralphotometer . . . . .		527
H. E. J. G. du Bois demonstirt mehrere neuere Constructionen		527
A. Raps demonstirt ein gemeinsam mit Hrn. A. Rubens con- struirtes grosses Spectrometer . . . . .		528
Sitzung vom 8. April 1892.		
O. Lummer. 1. Ein neues Spectralphotometer, nach gemeinsam mit Hrn. E. Brodhun ausgeführten Versuchen. Mit Demonstrationen. 2. Einiges zur Abbildung nicht selbstleuchtender Objects . . . . .		337
Sitzung vom 6. Mai 1892.		
Th. Gross. Ueber den Satz von der Entropie . . . . .		339
Sitzung vom 20. Mai 1892.		
F. Neesen. Ueber die Mitnahme von Losscheiben durch rasch umlaufende Axen . . . . .		346
W. Wien. Ueber die Bewegung der Kraftlinien im electro- magnetischen Felde . . . . .		352
	<b>Band 47.</b>	
Sitzung vom 21. October 1892.		
W. Jäger und D. Kreichgauer. Ueber den Temperaturcoefficienten des Quecksilbers. . . . .		767
L. Arons. Ueber einen Quecksilberlichtbogen . . . . .		767

## Namenregister zum Jahrgang 1892.

### A.

- Abt, A., Magnetisches Verhalten des Moraviczser Magnetits **45**, 80.  
 Adler, G., Capacität von Condensatoren **46**, 500. — Magnetischer Arbeitswerth des Eisens **46**, 503.  
 Arons, L., und H. Rubens, Fortpflanzungsgeschwindigkeit electrischer Wellen **45**, 381.  
 Arons, L., Electrolytischer Versuch **45**, 383. — Demonstrationsversuch mit electrischen Schwingungen **45**, 553.  
 Auerbach, F., Plasticität und Sprödigkeit **45**, 277. — Härtemessung **45**, 262.

### B.

- Bein, W., Ueberführungszahlen in Salzlösungen **46**, 29.  
 Berthold, G., Leidenfrost'sches Phänomen **47**, 350.  
 Birkeland, Kr., Electrische Schwingungen **47**, 583.  
 Bjerknes, V., Resonanzerscheinung und Absorptionsvermögen der Metalle für electrische Wellen **47**, 69.  
 Blasius, Eug., Geometrie der Lage in der Krystallographie **45**, 108. — Interferenzerscheinungen in zwei planparallelen Platten **45**, 316. — Interferenzerscheinungen in Newton'schen Farbengläsern und Linsencombinationen **45**, 385.  
 du Bois, H. E. J. G., Theorie des Ferromagnetismus **46**, 485. — Reflexion und Transmission des Lichtes **46**, 542.  
 du Bois, H. E. J. G., u. H. Rubens,

- Brechungsgesetz für absorbirende Medien **47**, 203.  
 Braun, F., Bemerkung gegen Hrn. Pellat **45**, 185.  
 Brodmann, C., Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten **45**, 159.  
 Budde, E., Integrirende Divisoren und Temperatur **45**, 751.

### C.

- Cantor, M., Capillaritätsconstanten **47**, 399. — Accumulator **47**, 424.  
 Cohen, R., Druck und Viscosität von Flüssigkeiten **45**, 666.  
 Cohn, E., Electrodynamik der Leiter **45**, 55. — Ausbreitung electrischer Schwingungen im Wasser **45**, 370. — Gordon-Winkelmann'sche Methode für Dielectricitätsconstanten **46**, 135. — Telephone bei Nullmethoden **47**, 752.

### D.

- Des Coudres, Th., Electromotorische Kräfte zwischen gekrümmten Quecksilberelectroden **46**, 292.  
 Dieterici, C., Lösungswärme und osmotischer Druck **45**, 207. 589.  
 Drude, P., u. W. Nernst, Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen **45**, 460.  
 Drude, P., Magnetooptische Erscheinungen **46**, 353.

### E.

- Ebert, H., Stromunterbrecher für Accumulatoren **47**, 349, s. auch E. Wiedemann.

- Edelmann, M. Th., Foucault'sches Pendel 45, 187.  
 Ellinger, H. O. G., Brechungsindex electrischer Strahlen in Wasser 46, 513.  
 Elster, J., u. H. Geitel, Licht-electrische Versuche 46, 281. — Wasserfallelectricität 47, 496.  
 Englisch, Eug., Galvanische Leitungsfähigkeit eines Wismuth-Blei-Amalgams 45, 591.

## F.

- Fromme, C., Magnetische Experimentaluntersuchungen 45, 798.

## G.

- Galitzine, B., strahlende Energie 47, 479. — Dichtigkeit gesättigter Dämpfe und Ausdehnung von Flüssigkeiten 47, 466.  
 Geitel, H., s. Elster.  
 Gieseler, Eb., Turbine und Drehwaage zu Vorlesungsversuchen. 46, 383.  
 Glan, P., Phasenänderung des Lichtes durch Reflexion 47, 252.  
 Goldhammer, D. A., Kerr'sches magnetooptisches Phänomen und magnetische Circularpolarisation 46, 71. — Electrodynamik der Leiter 46, 99. — Dispersion und Absorption des Lichtes nach der electrischen Lichttheorie 47, 93. — Electriche Lichttheorie 47, 265. — Electriche Theorie der magneto-optischen Erscheinungen 47, 345.  
 Graetz, L., Wärmeleitung der Gase 45, 298.

## H.

- Hallwachs, W., Brechungsexponenten verdünnter Lösungen 47, 380.  
 Helm, G., Fortpflanzung der Energie durch den Aether 47, 743.  
 v. Helmholtz, H., Princip der kleinsten Wirkung in der Electrodynamik 47, 1.  
 Henrichsen, S., Magnetismus organischer Verbindungen 45, 38.  
 Hertz, H., Durchgang der Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten 45, 28.

- Holborn, L., u. W. Wien, Messung hoher Temperaturen 47, 107.

## K.

- Kalischer, S., Stromverzweigung in linearen Leitern 46, 113.  
 Kayser, H., u. C. Runge, Spectra von Kupfer, Silber und Gold 46, 225.  
 Ketteler, E., Grenzbrechungsexponent für unendlich lange Wellen 46, 572.  
 Klemenčič, Ignaz, Reflexion von Strahlen electrischer Kraft an Schwefel- und Metallplatten 45, 62. — Selbstinductions - Coefficient einer Drahtrolle 46, 315.  
 Koch, K. R., u. A. Wällner, Galvanische Polarisation an kleinen Electroden 45, 475. 759.  
 Kohlrausch, F., Leitfähigkeit von Lösungen von Natriumsilikaten; Einfluss der Zeit 47, 756.  
 Koláček, F., Doppelbrechung in inductiver Darstellung 47, 258.  
 Kreichgauer, D., u. W. Jaeger, Temperaturecoefficient des electrischen Widerstandes von Quecksilber; Quecksilberwiderstände der Reichsanstalt 47, 513.  
 Krone, H., Farbenphotogramme von Spectren 46, 426.  
 Kümmell, G., Abscheidung von Niederschlägen an der Grenze von Electrolyten 46, 105.  
 Kummer, G., Erschütterungsströme 46, 119.  
 Kurlbaum, F., s. O. Lummer.

## L.

- Lebedew, P., Abstossende Kraft strahlender Körper 45, 292.  
 Lehmann, O., Entladungspotentialgefälle 47, 426.  
 Lenard, Ph., Electricität der Wasserfälle 46, 594. — Phosphoroskop mit Funkenlicht 46, 637.  
 v. Lepel, F., Oxydation des Stickstoffs durch Funken 46, 319.  
 Lindeck, St., Manganin 46, 515.  
 Lohnstein, R., Durchgang schwacher Ströme durch Electrolytzen 47, 299.

- Lommel, E., Sichtbare Darstellung der äquipotentialen Linien in durchströmten Platten; Erklärung des Hall'schen Phänomens 47, 766.  
 Lorentz, H. A., Brechung des Lichtes durch Metallprismen 46, 244.  
 Lummer, O., u. F. Kurlbaum, Bolometrische Untersuchungen 46, 204.

M.

- Melander, G., Ausdehnung der Gase bei niedrigen Drucken 47, 135.  
 Melde, F., Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in membranösen Körpern 45, 568, 729.  
 de Metz, G., Compressibilität des Quecksilbers 47, 706.  
 Meyer, G., Capillarelectrometer 45, 508.  
 Meyer, L., Osmotischer Druck 46, 167.  
 Miller, A., Elastische Dehnung 45, 191.  
 Milthaler, Manganin 46, 297.  
 Müller, G., Einfluss der Temperatur auf die Brechung des Lichtes in festen Substanzen 46, 260.

N.

- Negbaur, W., Potentialdifferenzen von Ketten mit trockenen festen Electrolyten 47, 27.  
 Nernst, W., u. R. Pauli, Electromotorische Wirksamkeit der Ionen 45, 353, s. auch Drude.  
 Nernst, W., Potentialdifferenz verdünnter Lösungen 45, 360.  
 Neumann, G., u. F. Streintz, Verhalten des Wasserstoffs zu Blei und anderen Metallen 46, 431.  
 Niemoeller, F., Diffusionscoefficienten von Flüssigkeiten 47, 694.

O.

- Oberbeck, A., Verhalten allotropen Silbers gegen den electrischen Strom 46, 265, 47, 353.  
 — Wheatstone'sche Brückenanordnung 47, 498.

P.

- Passavant, Hermann, Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit 46, 336.

- Pauli, R., s. Nernst.  
 Planck, M., Carnot-Clausius'sches Princip 46, 162.  
 Pringsheim, E., Argandlampe für Spectralbeobachtungen 45, 426.  
 — Kirchhoff'sches Gesetz und Strahlung der Gase 45, 428.  
 Pulfrich, Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases 45, 609.

Q.

- Quineke, G., Verhalten des polarisirten Lichtes bei der Beugung 47, 765.

R.

- Richarz, F., Galvanische Polarisation an kleinen Electroden 47, 567.  
 Riecke, F., u. W. Voigt, Piezoelectrische Constanten des Quarzes und Turmalins 45, 523.  
 Röntgen, W. C., Constitution des flüssigen Wassers 45, 91. — Einfluss des Druckes auf einige physikalische Erscheinungen 45, 98. — Einfluss der Compressionswärme auf die Bestimmungen der Compressibilität von Flüssigkeiten 45, 560. — Herstellung reiner Wasser- und Quecksilberoberflächen 46, 152.  
 Rubens, H., Dispersion ultrarother Strahlen 45, 238.  
 Rubens, H., u. B. W. Snow, Brechung der Strahlen von grosser Wellenlänge in Steinsalz, Sylvit und Fluorit 46, 529.  
 Rubens, H., s. auch unter Arons und du Bois.  
 Runge, C., s. auch Kayser.

S.

- Saxén, U., Reciprocität der electrischen Endosmose und Strömungsströme 47, 46.  
 Scheel, K., Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur 47, 440.  
 Schmidt, K. E. F., Babinet'scher Compensator 45, 377.  
 Schmidt, E., Interferenzstreifen in zwei gleich dicken Platten 46, 1.  
 Scholz, R., Lösungswärme einiger Salze in Wasser 45, 193.

- Schüz, L., Spezifische Wärme von leicht schmelzbaren Legierungen und Amalgamen **46**, 177.  
 Shea, D., Brechung und Dispersion des Lichtes durch Metallprismen **47**, 177.  
 Snow, B. W., Ultraroths Emissionsspectrum der Alkalien **47**, 208; s. auch H. Rubens.  
 Sommerfeld, A., Electromagnetische Erscheinungen in ruhenden Körpern **46**, 139.  
 Stenger, Fr., Electromotorische Gegenkraft des Lichtbogens **45**, 33.  
 Streintz, Fr., Secundärelement **46**, 449, s. auch Neumann.

## T.

- Toepler, A., Electriche Oscillationen von sehr kurzer Schwingungsdauer **46**, 306, 464, 642.  
 Toepler, M., Aenderung des specifischen Volumens des Schwefels mit der Temperatur **47**, 169.  
 Troje, O., Coefficient der Selbstinduction **47**, 501.

## U.

- Umlauf, K., Doppelbrechung in rotirenden Flüssigkeiten **45**, 304.

## V.

- Voigt, W., Innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle **47**, 671, s. auch Riecke.  
 VonderMühl, K., Theoretische Vorstellungen von Georg Simon Ohm **47**, 163.

## W.

- Walter, B., Molecularzerfall in Lösungen **45**, 189. — Brechungsexponenten des Wassers **46**, 423.

Warburg, E., Electriche Kraft an den Electroden und Electrisirung des Gases bei der Glimmentladung **45**, 1.

Wesendonck, K., Entladung der Electricität aus Spitzen etc. **47**, 175. — Electricitätserregung bei Reibung von Gasen an Metallen **47**, 529.

Werner, O., Dielectricitätsconstanten mittels des Differentialinductors **47**, 613.

Wiedemann, E., u. H. Ebert, Abstossung paralleler Kathodenstrahlen **46**, 158.

Wiedemann, E., Bemerkung zu der Erwiderung des Hrn. Walter **46**, 160.

Wien, Willy, Localisirung der Energie **45**, 685. — Bewegung der Kraftlinien im electromagnetischen Felde **47**, 327; s. auch Holborn.

Wien, Max, Widerstandsmessungen mit Hülfe des Telephons **47**, 626.

Wiener, Chr., Zerstreuung des Lichtes durch matte Oberflächen **47**, 638. — Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke **47**, 659.

Winkelmann, A., Wärmeleitung der Gase **46**, 323. — Telephon bei electriche Nullmethoden **46**, 666.

Wüllner, A., s. K. R. Koch.

## Z.

v. Zakrzewski, J., Spezifisches Gewicht und Schmelzwärme des Eises **47**, 155.

Zehnder, L., Strahlen electriche Kraft **47**, 77.

# Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

## Sitzung vom 4. November 1892.

Vorsitzender: Hr. E. DU BOIS-REYMOND.

Hr. H. E. J. G. du Bois sprach

Ueber polarisirende Gitter.

Der Inhalt des Vortrages bildet den zweiten Theil der inzwischen in Wied. Ann. (Bd. 46. p. 548—562) veröffentlichten Abhandlung: „Reflexion und Transmission des Lichtes durch gewisse äolotrope Gebilde“. — Drahtgitter und Platinschichtgitter wurden vorgezeigt.

Hr. Th. Gross trug dann vor

Ueber den Satz von der Entropie.<sup>1)</sup>

Ich komme zunächst nochmals auf die Untersuchungen von CLAUDIUS zurück. Er will beweisen, dass

$$\frac{dQ}{\vartheta} = \frac{dU}{\vartheta} + \frac{p dv}{\vartheta}$$

ein vollständiges Differential ist, wozu er zwei Wege einschlägt.

Erstens stellt er die äussere Arbeit in irgend einem umkehrbaren Kreisprocesse durch eine ebene Fläche dar, die er sich in unendlich schmale CARNOT'sche Kreisprocesse zerlegt denkt, und folgert für jeden von diesen die Entropiegleichung analog wie für den endlichen CARNOT'schen Process.

Ein im wesentlichen gleiches Verfahren zur Ableitung der genannten Gleichung wird auch von den meisten anderen Autoren angewendet.

Hiergegen bemerke ich Folgendes:

1. Wenn diese Ableitung richtig ist, so muss sie offenbar sofort für jeden Kreisprocess gelten, der den beiden Bedingungen genügt, dass das Differential seiner Arbeit den Ausdruck  $p dv$  hat, und dass die Temperaturen des veränderlichen Körpers

1) Man vgl. diese Verhandl. vom 6. Mai und 3. Juni 1892.

2) Die Einwendungen von CLAUDIUS gegen Hrn. ZEUNER's Methode halte ich für durchaus begründet.

für diejenigen der Wärmequellen, die CLAUSIUS in den Ausdruck der Entropie aufnimmt, gesetzt werden können. Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, ein Punkt, den ich weiter unten erörtern werde, so würde sie doch, wie ich bereits in meinem vorigen Vortrage hervorgehoben habe, auf alle zwischen Gleichgewichtszuständen stattfindenden Vorgänge zu übertragen sein, wenn als Temperaturen der Entropie, die mittleren des veränderlichen Körpers gewählt werden.

Um daher auf dem vorliegenden Wege die Beschränkung der Entropiegleichung auf die umkehrbaren Vorgänge zu rechtfertigen, war jedenfalls zu beweisen, dass nur in diesen die genannten beiden Bedingungen erfüllt sind, was meines Wissens nirgends geschehen ist.<sup>1)</sup> Vielmehr können z. B. in den nicht-umkehrbaren mit Reibung verbundenen Vorgängen die Temperaturen der Wärmequellen und des veränderlichen Körpers gleich sein, und auch die Arbeit hat in ihnen den geforderten Ausdruck, indem die Reibung als eine Widerstandskraft aufgefasst werden kann, die auf einer gewissen Strecke zu überwinden ist. Dass die Reibung keine Spannkraft des veränderlichen Körpers ist, kommt dabei nicht in Betracht; weil die Qualität der Kräfte, wogegen die äussere Arbeit aufgewendet wird, gleichgültig ist, wenn letztere nur die angegebene Form hat, und weil die Hülle, wenn sie durch Reibung oder andere Ursachen Zustandsänderungen erleidet, zu dem veränderlichen Körper zu rechnen ist. In Kreisprocessen wird die Reibungsarbeit, da sie sich in moleculare Energie umsetzt, überhaupt Null.

2. Man kann wohl einen CARNOT'schen Process aus endlichen adiabatischen Linien und beliebig kurzen Isothermen construiren, geht man aber zu Isothermendifferentialen über, so liegt in der Annahme, dass sie zwischen adiabatischen Linien liegen, eine fehlerhafte Ueberbestimmung.

Für die adiabatische Aenderung eines Gases zwischen den Temperaturen  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  und den Volumen  $v_1$ ,  $v_2$  ist

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{v_1^{\kappa-1}}{v_2^{\kappa-1}},$$

1) Auch die bezüglichen Bemerkungen in POINCARÉ, „Thermodynamique“. Paris 1892, p. 210, enthalten nur Behauptungen.



worin  $\alpha$  den Quotienten der beiden specifischen Wärmen bezeichnet. Würde eine zweite, der ersteren unendlich nahe adiabatische Aenderung von denselben Temperaturen begrenzt, so wäre auch

$$\frac{v_1^{n-1}}{v_2^{n-1}} = \frac{(v_1 + dv)^{n-1}}{(v_2 + dv)^{n-1}},$$

woraus durch binomische Entwicklung und Vernachlässigung der unendlichen kleinen Grössen höherer Ordnung  $v_1 = v_2$  folgt. Die Verbindungslinien zwischen den Isothermen-Differentialen sind also nicht adiabatisch. Oder: für zwei bestimmte isotherme Aenderungen ist  $dQ_1 = R \vartheta_1 (dv/v_1)$ ,  $dQ_2 = R \vartheta_2 (dv/v_2)$ . Soll nun  $dQ_1/\vartheta_1 = dQ_2/\vartheta_2$  sein, so folgt wiederum  $v_1 = v_2$ .

Man darf eben den CARNOT'schen Satz nicht allgemein umkehren: Wenn zwei Isothermen von zwei adiabatischen Linien begrenzt werden, so verhalten sich die dem veränderlichen Körper auf den ersteren zugeführten Wärmemengen wie ihre Temperaturen; hieraus folgt aber nicht, dass immer, wenn dieses Verhältniss für sie stattfindet, die beiden Isothermen von adiabatischen Linien begrenzt werden.

3. CLAUDIUS lässt den veränderlichen Körper einen unendlich schmalen Kreisprocess durchlaufen, sodass die Aenderung seiner inneren Energie, die bei einem derartigen Vorgange  $dU$  ist, Null wird, und nimmt dann für ihn auf Grund des für den endlichen CARNOT'schen Process Festgestellten eine Gleichung von der Form  $dQ_1/\vartheta_1 + dQ_2/\vartheta_2 = 0$  an. Letztere würde also auf alle Fälle nur unter der Voraussetzung  $dU = 0$  oder  $U = \text{const.}$  entwickelt sein, und es würde demnach so nicht die allgemeine Differentialgleichung der Entropie, sondern nur die Gleichung  $dQ/\vartheta = p dv/\vartheta$  zu erhalten sein. Für Gase ist aber  $p dv/\vartheta = R dv/v$  das Differential einer Function von  $v$  allein, sodass auf dem vorliegenden Wege über die Darstellbarkeit der Entropie durch eine Function von mehreren unabhängigen Veränderlichen kein Aufschluss erhalten wird. Diesem Mangel wird abgeholfen, wenn man an Stelle der gegebenen Curve, die einen Vorgang zwischen Gleichgewichtszuständen darstellt, Elemente von Isothermen und Aenderungen bei constantem Volumen setzt. Wird die dem veränderlichen Körper zugeführte Wärme für die ersteren mit  $dQ$ , für die letzteren mit  $dQ'$  bezeichnet, so sind für Gase

$$\frac{dQ'}{\vartheta} = \frac{p dv}{\vartheta} = R dv/v$$

und

$$\frac{dQ''}{\vartheta} = \frac{dU}{\vartheta} = c_v \frac{d\vartheta}{\vartheta},$$

worin  $c_v$  die constante spezifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet, zu integrieren, und man erhält die Gleichung

$$\frac{dQ'}{\vartheta} + \frac{dQ''}{\vartheta} = \frac{dQ}{\vartheta} = \frac{dU}{\vartheta} + \frac{p dv}{\vartheta},$$

Denn für die  $\vartheta$  der unendlich kleinen Aenderungen bei constantem Volumen können diejenigen der ihnen unmittelbar benachbarten Isothermendifferentiale gesetzt werden.

Für Kreisprocesse mit beliebigem Hin- und Rückgange wird dann  $\int dU/\vartheta = 0$ , weil  $c_v d\vartheta$  und somit auch  $c_v d\vartheta/\vartheta$  ein vollständiges Differential ist; und ebenso wird für sie auch  $\int p dv/\vartheta = 0$ , weil zufolge der oben (Nr. 2 a. E.) angeführten Formel für zwei Isothermen  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , die zwischen zwei einander unendlich nahen Aenderungen bei constantem Volumen liegen, dem absoluten Betrage nach  $dQ_1/\vartheta_1 = dQ_2/\vartheta_2$  ist. So ergibt sich die Gleichung  $\int dQ/\vartheta = 0$  zunächst für Gase unabhängig von den besonderen Bedingungen des CARNOT'schen Kreisprocesses. Ihre Geltung für Kreisprocesse anderer Körper kann dann wie in meinem vorigen Vortrage<sup>1)</sup> gefolgert werden.

Zweitens sucht CLAUSIUS den Entropiesatz mittels seiner Theorie der Verwandlungswerthe zu gewinnen. Da die von mir hiergegen erhobenen Einwendungen zum Theil Missverständnissen begegnet sind, seien noch einige Bemerkungen verstattet.

Soll  $dQ/\vartheta$  das Differential der Entropie sein, so muss es jedenfalls integrirbar sein, weil ein nicht integrirbarer Ausdruck keinen physikalischen Sinn hat. Zu bestimmen bleibt aber, ob es als das vollständige Differential einer Function von mehreren unabhängig Veränderlichen oder nur als das Differential nach einer einzigen unabhängig Veränderlichen aufzufassen ist. Hierüber gibt CLAUSIUS keinen Aufschluss.

Er nimmt von vornherein ohne jeden Beweis an, dass man für beliebige Körper aus einer Anzahl Differentiale  $dQ/\vartheta$  einen Kreisprocess bilden kann, worin  $\int dQ/\vartheta = 0$  ist.<sup>2)</sup> Dadurch ist aber sofort die Vollständigkeit aller der Differen-

1) Vgl. l. c. p. 45.

2) Vgl. Mech. Wärmetheorie 1. 1876, p. 102, Z. 8 v. u. ff. und p. 107, § 6, und ebenso in der früheren Aufl. 1. 1864, p. 141 ff.

tiale  $dQ/\vartheta$ , die einander formell gleich sind, gesetzt. Wenn er also auf Grund dieser Annahme schliesst, dass  $\int dQ/\vartheta$ , für sämtliche Differentiale genommen, erstens in einem umkehrbaren Kreisprocesse Null ist und zweitens in einem nicht umkehrbaren Kreisprocesse kleiner als Null sein kann; so ist das erste offenbar nichts als ein Cirkelschluss und das zweite ein Widerspruch mit sich selbst, da nach der Annahme das Differential vollständig ist und in Folge der Ungleichung vom Wege abhängig wäre.

Ich will jetzt einen allgemeinen Satz entwickeln, von dem die Entropiegleichung nur ein besonderer Fall ist.

Nach dem Princip von der Erhaltung der Energie ist jede Energieänderung durch eine mechanische Arbeit zu messen. Letztere kann aber zerlegt werden in eine Summe von Arbeiten von Massenelementen.

Demnach kann jede Energieänderung eines Körpers in Bezug auf ihren Arbeitswerth als eine Summe von Arbeitsänderungen seiner Massenelemente dargestellt werden. Die mechanische Arbeit eines Massenelementes kann aber bestehen in Arbeit bei Volumenänderungen und in Arbeit bei Verschiebung seines Schwerpunktes. Letztere kann man sich wiederum hervorgebracht denken durch die Druck und Volumenänderungen anderer Massenelemente: folglich sind sämtliche Energieänderungen eines Körpers durch Druck und Volumenänderungen seiner Massenelemente zu messen. Setzt man für die inneren und äusseren Arbeitsänderungen der einzelnen Massenelemente eines Körpers Mittelwerthe und summirt über alle, so erhält man also die Gleichung  $dQ = dU + p dv$  als Arbeitsmaass für irgend eine unendlich kleine Energieänderung eines Körpers, indem nach dem Vorstehenden Schwerpunktsverschiebungen eine analoge Gleichung ergeben. Dabei ist es gleichgültig, ob die thatsächliche Energieänderung mit lebendiger Kraft und zwischen Gleichgewichtszuständen erfolgt oder nicht, da sie jedenfalls ein Arbeitsmaass hat, das lebendige Kraft nicht als solche sondern nur ihrem Arbeitswerthe nach enthält.

Es bezeichne nun  $q$  den mittleren Arbeitswerth der Intensität, d. h. des in der Masseneinheit enthaltenen Betrages der sich ändernden Energie, so ist

$$\frac{dQ}{q} = \frac{dU}{q} + \frac{p dv}{q}$$

ein vollständiges Differential. Denn  $\varrho$  ist eine Function von  $U$ . Ist nämlich von dem veränderlichen Körper die Masseneinheit vorhanden, wie der Einfachheit wegen angenommen sei, so ist  $\varrho = U$  und andernfalls ist es ein constantes Vielfaches von  $U$ . Ferner ist  $dU$  für sich ein vollständiges Differential. Folglich ist erstens auch  $dU/\varrho$  ein solches. Um zu zeigen, dass  $p dv/\varrho$  integrirbar ist, bestimme ich die Form der Function  $\varrho$ .  $dU = d\varrho$  ist die Summe der Arbeiten, die dem veränderlichen Körper zu einer unendlich kleinen Volumenänderung bei constantem Druck und zu einer unendlich kleinen Druckänderung bei constantem Volumen zuzuführen sind. Demnach ist  $d\varrho = p dv + v dp$  und  $\varrho = p v$ , indem die Integrationsconstante gleich Null gesetzt werden kann. Hieraus folgt zweitens, dass auch  $p dv/\varrho = 1/v dv$  zu integrieren ist. Also ist, wie behauptet,  $dQ/\varrho$  ein vollständiges Differential. Die Grössen  $dU/\varrho$ ,  $p dv/\varrho$  sind die auf die Einheit der Intensität reducirten Energieänderungen in Arbeitsmaass. Berücksichtigt man ferner, dass für ein abgeschlossenes System  $dQ = dQ/\varrho = 0$  ist, so ergibt sich der Satz:

Die Quantität jeder beliebigen, auf die Einheit ihrer Intensität reducirten Energieänderung eines Massensystemes ist durch ihren Anfangs- und Endwerth vollständig bestimmt.

Nach dem Vorstehenden kann an die Stelle des gegebenen Massensystemes zur Messung seiner Energieänderung ein solches gesetzt werden, das nur Arbeit enthält. Ebenso wohl kann dazu aber auch ein System gewählt werden, das nur Wärme enthält. Alsdann ist, wie die vollkommenen Gase zeigen,  $\varrho$  proportional  $\vartheta$ , und man erkennt auch die allgemeine Geltung der Entropiegleichung, die so ohne Hülfe des CLAUSIUS'schen Grundsatzes abgeleitet ist, über den ich ein anderes Mal sprechen werde. In den Ausdruck der Entropie sind hier die mittleren Temperaturen des veränderlichen Körpers, nicht die der Wärmequellen eingeführt; der Unterschied ist jedoch principiell nicht wesentlich. Bedeutet  $\vartheta$  die mittlere Temperatur des veränderlichen Körpers, so ist  $dQ/\vartheta$  immer ein vollständiges Differential, wie hier durch die Zerlegung einer beliebigen Curve in isotherme und Aenderungen bei constantem Volumen und allgemeiner durch die vorstehenden Erörterungen bewiesen

wurde. Die absoluten Temperaturen der Wärmequellen können aber durch Werthe der Function  $\vartheta = f(v, p)$  ausgedrückt werden, die die mittlere absolute Temperatur des veränderlichen Körpers darstellt. Ist nun erstens ein Vorgang gegeben, dessen obere und untere Grenze voneinander verschieden sind, und es sind für diese Grenzen die Temperaturen des veränderlichen Körpers und der Wärmequellen gleich, so wird durch Einsetzen der letzteren statt der ersteren das vom Wege unabhängige Integral  $\int dQ / \vartheta$  nicht geändert. Sind sie dagegen ungleich, so kommt das nur für die Grenzen des Integrals in Betracht. Ist zweitens ein Kreisprocess gegeben, so müssen  $p$  und  $v$  in seinem Anfangs- und Endpunkte dieselben Werthe haben, und folglich müssen, wegen  $\vartheta = f(v, p)$ , die Temperaturen der Wärmequellen, mit denen der veränderliche Körper in diesen beiden Punkten in Berührung ist, wenn sie in den Ausdruck der Entropie aufgenommen werden, gleich sein. Also fallen auch bei Einsetzung der Temperaturen der Wärmequellen die obere und untere Grenze des Entropieintegrals zusammen, während dessen Integral nach dem vorher Bemerkten vollständig bleibt; es ist daher auch dann Null.

Das Vorstehende ist auch gegen die Ausführungen geltend zu machen, wodurch VERDET die CLAUSIUS'sche Ungleichung zu begründen sucht.<sup>1)</sup> Sind in einem Kreisprocesse die Temperaturen der Wärmequellen von denen des veränderlichen Körpers verschieden und werden die ersteren statt der letzteren in die Entropie eingesetzt, so soll dadurch der absolute Betrag der  $-dQ / \vartheta$  grösser, der der  $+dQ / \vartheta$  kleiner werden. Ist ferner in Kreisprocessen Reibung oder lebendige Kraft vorhanden, so soll dadurch ebenfalls der absolute Betrag der  $-dQ / \vartheta$  vergrößert werden. In allen den genannten Fällen wäre also  $\int dQ / \vartheta < 0$ . Das Differential wäre demnach in ihnen vom Wege abhängig, wogegen es nach dem Obigen für beliebige  $dQ$  und  $\vartheta$  vollständig bleibt. Zu fragen ist auch, wie denn das vom Wege abhängende  $dQ$ , wenn für  $\vartheta = f(v, p)$  durch Einsetzen der Temperaturen des veränderlichen Körpers oder der Wärmequellen verschiedene Wege angenommen werden, allgemein ungeändert bleiben kann, was doch nothwendig ist, damit

1) VERDET, *Théorie méc. d. l. chaleur*. 1. p. 188 ff. Paris 1868.

die  $dQ/\vartheta$ , die die absolute Temperatur der Wärmequellen und diejenigen, die die absolute Temperatur des veränderlichen Körpers enthalten, in Bezug auf ihre Grösse zu vergleichen sind.

Die Umkehrbarkeit der Zustandsänderungen hat sich in den obigen allgemeinen Erörterungen als unwesentlich herausgestellt. In Wahrheit bezieht sie sich auch auf die Qualität, nicht auf die Quantität der Energie. Auch ist die ursprüngliche Bedingung die, dass das Arbeitsdifferential die Form  $p dv$  hat: wenn der Vorgang umkehrbar ist, so wird sie erfüllt; aber es folgt nicht umgekehrt, dass immer, wenn sie erfüllt wird, der Vorgang umkehrbar ist.

---

Hr. M. Planck bemerkte, dass er, im Gegensatz zu dem Hrn. Vortragenden, bei der Prüfung der CLAUSIUS'schen Beweisführung keine wesentliche Lücke gefunden hat, dass er aber bei der Verschiedenheit der Ausgangspunkte eine mündliche Verständigung für aussichtslos hält, und beschränkt sich daher auf die Berührung einiger ihm aus dem Vortrage gerade im Gedächtniss gebliebenen Punkte.

---

Hr. E. O. Erdmann berichtet dann

Ueber eine auffällige Oxydationserscheinung des reinen Aluminiums bei Berührung mit Quecksilber.

Sobald eine wirkliche Berührung beider Metalle stattfindet, sieht man schneeweisse fadenförmige auch halmartig gekrümmte Gebilde von den Berührungsstellen der beiden Metalle fortwachsen, welche in einigen Minuten eine Länge von 2 und 3 Centimeter erreichen. Unter dem Mikroskop erscheinen sie als röhrenförmige oder flächenförmige Schleier von ungemeiner Zartheit und völlig amorph. Fallen sie beim Schütteln oder Klopfen ab, so sehen sie wie Charpie aus. Die chemische Untersuchung ergibt, dass sie aus reinem Thonerdehydrat bestehen.

Für die Entstehung dieser Oxydationsgebilde ist es gleichgültig, ob die Berührung der Metalle durch Reiben derselben bewirkt ist, oder durch Reinigung der Oberflächen mit Salzsäure oder mit Natronlauge, nachträgliches Waschen mit vielem Wasser und Trocknen mit Fliesspapier.



Als Grund dieser eigenthümlichen Oxydation könnte angegeben werden:

1. die Bildung eines leicht oxydirbaren Aluminiumamalgams, welches sich an der Berührungsstelle der Metalle in dem Maasse immer wieder bildet, als das Aluminium in der feuchten Luft sich oxydirt.

2. die electrolytische Zersetzung einer dünnen Wasserschicht, welche an der Oberfläche der beiden ein galvanisches Element bildenden Metalle condensirt ist.

3. dass das sehr electropositive Aluminium durch den Contact mit dem Quecksilber eine grössere Affinität zum Sauerstoff erlangt, in ähnlicher Weise wie nach MAGNUS' Versuchen die am Magneten hängende Eisenfeile.

### **Sitzung vom 18. November 1892.**

Vorsitzender: Hr. E. DU BOIS-REYMOND.

Hr. F. Neesen sprach:

Ueber photographische Darstellung der Geschoss-  
pendelung.

Das in diesen Verhandlungen vom Jahre 1888 p. 197 angegebene Verfahren, die Geschossbewegung photographisch zu fixiren, ist Dank dem Entgegenkommen der Kgl. Preuss. Artillerie-Commission in den letzten Jahren auf dem Schiessplatze zu Cummersdorf praktisch ausgeführt worden.

Bei der einen Ausführungsform befand sich im Kopfe des Geschosses, der abschraubbar war, auf einer festen Hinterlagplatte parallel der Geschosswand eine photographische Gelatineplatte, welcher gegenüber in der Geschosswand eine Oeffnung von 0,5 mm Durchmesser angebracht war. Bei einer zweiten Einrichtung wurde in den mittleren Theil des Geschosses zwischen zwei Verschlussböden eine Stahlscheibe parallel der Geschossaxe gelagert, welche Scheibe gleichfalls die erwähnten Gelatineplatten trug. Der Mitte derselben gegenüber hatte die Geschosswandung wieder eine kleine Oeffnung zum Einlassen der Sonnenstrahlen. Das Geschütz wurde so gerichtet, dass die Sonnenstrahlen auf den photographischen Platten kleine Sonnenbilder bildeten. Bei jeder Umdrehung zeichneten dieselben einen



Ellipsenzug. Mit der Drehung der Geschossaxe ändert sich die Lage desselben; aus der Entfernung der gezeichneten Spur von der Mitte der Platte und dem Abstand der Platte von der Lichtöffnung lässt sich der Winkel zwischen Geschossaxe und Sonnenstrahl berechnen. Um hieraus weiter die Drehung ersterer um die Vertikale und Horizontale zu bestimmen, müssen die Zeichnungen von zwei Schüssen kombinirt werden, welche unter denselben ballistischen Bedingungen mit verschiedener Richtung gegen den Sonnenstrahl abgegeben werden. Das Geschoss war eine 15 cm Granate von 39,5 kg Gewicht. Die Anfangsgeschwindigkeit betrug ungefähr 200 m. Es waren somit die Bedingungen für eine sehr starke konische Pendelung gegeben.

Die zu erwartenden Ellipsenzüge ergaben sich bei den vielfachen Versuchen in sehr ausgeprägter Zeichnung. Dass das diffus einfallende Tageslicht die Zeichnung nicht störte, zeigen vor allem Platten, welche beim Aufschlagen auf dem Boden etwa  $\frac{1}{2}$  Stunde lang liegen geblieben waren, so dass eine der Oeffnungen frei dem diffusen Tageslicht ausgesetzt blieb. Es bildete sich auf einer solchen Platte das Bild des umgebenden Waldes durchzogen von den während der Geschossbewegung entstandenen elliptischen Curven. Bei einigen Platten erschienen die Curvenzüge theilweise weiss statt geschwärzt, als weiteres Beispiel für die wohlbekannte Erfahrung, dass von momentanen Lichteindrücken getroffene Stellen bei weiterer Belichtung hell ausfallen. Stellenweise zeigen einzelne Curven Unterbrechungen; dieselben wurden dadurch gebildet, dass das Geschoss an Baumstämmen vorbei flog und letztere die Sonnenstrahlen abhielten.

Die Curvenzüge sind anfänglich nicht genaue Ellipsen, weil während der einzelnen Umdrehung die Geschossaxe erheblich schwankt. Diese Verschiedenheit in der Führung der einzelnen Linien kann benutzt werden um die zeitliche Aufeinanderfolge derselben zu bestimmen.

Zur Berechnung mussten zunächst die bei den beiden Ergänzungsschüssen gleichen Phasen der beiden Schüsse entsprechenden Linien herausgesucht werden. Für die ersten Bewegungen nach dem Verlassen der Geschossmündung ergab der eben erwähnte Zug der Linien hierzu hinreichenden Anhalt; für die weiteren geringeren Schwankungen musste die gleiche

örtliche Aufeinanderfolge auf den beiden Platten als maassgebend angenommen werden. Erschwert wird die Auswahl dadurch, dass, wie es ja auch von vornherein anzunehmen ist, der Lichtstrahl über die Platte hin und her wandert. Die aus diesen zusammengehörenden Linien berechneten Schwankungen um einer Horizontal- bez. Vertikalachse sind auf Coordinatenpapier aufgetragen und unter den so erhaltenen Punkten die wahrscheinliche zeitliche Aufeinanderfolge aufgesucht. Auch hierzu gibt zunächst der erwähnte Zug der Linien Anhalt, für die späteren Bewegungen enthält diese Auswahl in gewissen Grade Willkürlichkeiten. Bei den Schüssen auf etwa 200 m ist die zeitliche Aufeinanderfolge der scharf von einander zu unterscheidenden Linien sicher.

Es ergibt sich nun übereinstimmend zunächst eine ausserordentlich starke Drehung der Geschossaxe sowohl um die Vertikal- wie um die Horizontalaxe. Im Verlaufe von ungefähr 11—12 Umdrehungen der Geschossaxe beschreibt die Geschossspitze eine Umdrehung; die starke Bewegung der Geschossaxe hält während etwa zwei dieser Umdrehungen an, dann werden die Schwankungen der Geschossaxe geringer, die Linien gaben eine fortwährende starke Senkung an, so dass darnach die Axe bald unter die Tangente der Flugbahn zu liegen kam. Eine Umdrehung wird auch in diesem weiteren Verlauf während der Zeit von etwa 12 Umdrehungen des Geschosses zurückgelegt. Die Ausschläge in vertikalem wie in horizontalem Sinne betragen bis  $80^\circ$ .

Mit den Folgerungen, welche sich aus der üblichen Annahme einer Constanz des Luftwiderstandsmomentes ergeben, ist diese starke und rasch verlaufende Umdrehung der Geschossspitze nicht vereinbar.

Wenn für den Luftwiderstand ein Moment angenommen wird, welches sich auch wegen der Veränderlichkeit des Armes fortwährend ändert, so muss dieses Moment periodisch veränderlich sein, ebenso wie die Winkelgeschwindigkeiten des Geschosses um zwei senkrecht zur Geschossaxe stehende Axen, welche Winkelgeschwindigkeiten sich in den Umdrehungen der Geschossspitze zeigen. Zwischen den Perioden dieser Winkelgeschwindigkeit und denen des Luftwiderstandsmomentes ist jedenfalls eine Beziehung anzunehmen.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich ein particuläres Integral der entsprechenden EULER'schen Gleichungen angeben, welches, wenn es durch die Versuche der Wirklichkeit entsprechend nachgewiesen wird, erlaubt, aus der Amplitude und Periode der Spitzenumdrehung das Gesetz des Luftwiderstandes zu ermitteln.

Wird die Winkelgeschwindigkeit um die Längsachse mit  $\varphi_0$ , die um zwei senkrecht dazu stehende Axen durch den Schwerpunkt mit  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bezeichnet, ist  $b$  eine von den Trägheitsmomenten um diese Axe abhängige Constante, und  $w$  das Luftwiderstandsmoment, so können die EULER'schen Gleichungen in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = w - b\varphi_0\varphi_2$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = b\varphi_0\varphi_1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = b\varphi_0w - b^2\varphi_1\varphi_2^2.$$

Setzt man nun als particuläres Integral:

$$w = g(t) + ae^{imt}$$

$$\varphi_2 = f(t)e^{int}$$

so ergibt sich

$$\varphi_2 = \frac{b\varphi_0g}{b^2\varphi_0^2 - m^2}(1 + \cos mt)$$

$$\varphi_1 = -\frac{mg}{b^2\varphi_0^2 - m^2}\sin mt$$

$$w = a\left\{\frac{b^2\varphi_0^2}{b^2\varphi_0^2 - m^2} + \cos mt\right\}$$

Die vorhandenen Versuche reichen nicht aus, um diese Gleichungen zu prüfen.

Der ausführlichere Aufsatz mit Wiedergabe der erhaltenen Zeichnungen ist in dem October-November Hefte 1892 des Archives für Artillerie und Ingenieur-Wissenschaften enthalten.

# Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

---

## Sitzung vom 2. December 1892.

Vorsitzender: Hr. E. DU BOIS-REYMOND.

Hr. H. E. J. G. du Bois berichtet über eine von Hrn. Shea

Ueber die Brechung und Dispersion in Metallen  
angestellte Untersuchung.

## Sitzung vom 16. December 1892.

Vorsitzender: Hr. A. KUNDT.

Hr. O. Lummer sprach

Ueber das photometrische Princip bei Halbschatten-  
apparaten

und begleitete seinen Vortrag mit einigen Demonstrationen.

Hr. E. Goldstein trug dann vor:

1. Ueber eine Eigenschaft der Anode GEISSLER'scher Röhren.

Während eine grosse Anzahl von Eigenschaften der Kathode inducirter Entladungen in evacuirten Räumen ermittelt ist, kennt man nur äusserst wenige Eigenschaften der Anode. Die nachfolgende Mittheilung soll eine neue Eigenschaft der Anode beschreiben. Wenn ein Entladungsgefäss, z. B. mit an den Enden einander gegenüberstehenden Electroden, eine gewisse Weite überschreitet, so reducirt sich bei zunehmender Evacuierung das positive Licht, wenn es nicht ganz verschwindet, auf eine dünne Haut an der Oberfläche der Anode, die Anode „glimmt“. Die Farbe dieser Lichthaut ist in verdünnter Luft, die als Medium dieser Versuche vorausgesetzt wird, pfirsichblüthfarben. Ist eine Electrode aus Stücken verschiedener Metalle zusammengesetzt, benutzt man z. B. eine Kreisscheibe, die zur Hälfte aus Aluminium, zur Hälfte aus Silber besteht,

so verbreitet das Kathodenlicht sich im allgemeinen über beide Hälften einer solchen Electrode, zeigt aber beträchtlich grössere Helligkeit an der Aluminiumhälfte. Sehr wahrscheinlich beruht letzteres auf der schon von HITTORF constatirten Thatsache, dass der Uebergangswiderstand an einer silbernen Kathode erheblich grösser ist als an einer Aluminiumkathode. — Benutzt man eine derartige bis dahin ungebrauchte Electrode von ganz frischer Oberfläche als Anode, so überzieht das Glimmen die ganze der Kathode zugekehrte Anodenseite und kann an beiden Hälften, symmetrische Lage derselben gegen die Kathode vorausgesetzt, mehr oder weniger genähert gleiche Intensität zeigen. Diese Ausbreitung des Glimmens erhält sich, wenn man die Entladung weiter in derselben Richtung hindurchgehen lässt, und tritt ebenso wieder auf, wenn der Stromdurchgang unterbrochen wird, und dann wieder im selben Sinne einsetzt. Wird der Strom aber nur für wenige Secunden umgekehrt, sodass die zusammengesetzte Electrode als Kathode fungirt, und dann wieder die frühere Stromrichtung hergestellt, so ist das Glimmen hell an der Silberhälfte der Anode, dagegen ist die Aluminiumhälfte entweder völlig lichtlos, oder so mattleuchtend, dass es besonderer Aufmerksamkeit zur Erkennung ihres Lichtes bedarf. Die Lichtgrenze entspricht genau der Trennungslinie der beiden aneinanderstossenden Metallflächen. Das Entladungslicht verschmäht an der Anode also dann dasjenige Metall, das von dem Kathodenlicht bevorzugt wird und tritt hell an derjenigen Fläche auf, an der das Kathodenlicht die geringere Intensität zeigt. Der Vortragende demonstirt die Erscheinung ausser an einem Gefässe mit der Kreisscheibe Aluminium-Silber auch an einer Reihe anderer zusammengesetzter Electrodenflächen. In eine Aluminiumkreisscheibe von 4 cm Durchmesser war eine sternförmige Fläche aus Silber eingelassen. Das Anodenglimmen beschränkte sich auf den Silberstern und liess die ganze umgebende Aluminiumfläche lichtlos. Werden in eine Aluminiumscheibe von mehreren Centimetern Durchmesser zahlreiche gesonderte Silberpunkte (Kreisflächen von  $\frac{3}{4}$  mm bis  $2\frac{1}{2}$  mm Durchmesser) eingelassen, so tritt das Anodenleuchten an den sämtlichen Silberpunkten auf, während die zwischenliegenden Aluminiumtheile dunkel sind. Man kann so durch die Anordnung der Silberpunkte beliebige leuchtende Figuren (Sterne,

Arabesken etc.) hervorbringen. Werden umgekehrt in eine Silberseiche Aluminiumpunkte eingelassen, so leuchtet die ganze übrige Scheibe, nur die Aluminiumpunkte bleiben dunkel. Besteht die Anode aus einer Kette von abwechselnden Gliedern aus Silber und aus Aluminium, so leuchten nur die Silberglieder. Das Silber läuft, während es als Kathode in verdünnter Luft dient, sehr rasch an, es wird stahlgelb bis stahlblau. — An anderem Orte soll über die beschriebene Erscheinung, namentlich hinsichtlich des Verhaltens anderer Metalle und in anderen Gasen, eingehender berichtet werden.

## 2. Ueber die scheinbare gegenseitige Abstossung gleichgerichteter Kathodenstrahlen.

W. CROOKES hat 1879 einen sehr bekannt gewordenen Versuch beschrieben, aus dem er folgert, dass gleichgerichtete Kathodenstrahlen einander abstossen. CROOKES bringt an das eine Ende eines cylindrischen Entladungsgefässes zwei kleine, etwas gegen einander geneigte Kreisscheiben als Kathoden und stellt vor denselben ein Diaphragma auf, das zwei parallele Schlitzze, je einen gegenüber einer Scheibe, enthält. Die schmalen zwei Strahlenbündel, welche durch die Schlitzze hindurchgehen, markiren sich durch ihre leuchtenden Spuren auf einer unter  $90^\circ$  gegen das Diaphragma und die Richtung der Schlitzze gestellten langen phosphoreszenzfähigen Platte. Macht man jede der beiden Kreisscheiben einzeln zur Kathode, so sieht man, dass die Axen der durchgelassenen beiden Strahlenbündel ziemlich stark gegen die Gefässaxe geneigt sind und sich in einigem Abstände vom Diaphragma schneiden; macht man beide Flächen gleichzeitig zu Kathoden, so entfernen die Axen der beiden Strahlenbündel sich von einander, als wenn sie einander abstiessen und werden nahe oder ganz parallel. — Ich selbst hatte bereits 1876 in den Monatsberichten der Berliner Academie die später von mir als Deflexion bezeichnete Erscheinung beschrieben, dass ein Kathodenstrahl, der in der Nähe einer zweiten Kathode vorüberstreicht, im Sinne einer Abstossung von der zweiten Kathode abgelenkt wird, und ich vermuthete nach dem Bekanntwerden des CROOKES'schen Versuchs, dass er nur einen Fall der von mir beschriebenen Abstossung darstelle.

Ich fand diese Vermuthung durch einen Versuch bestätigt, der bisher durch den Druck nicht veröffentlicht worden ist und der im Nachfolgenden beschrieben werden soll. Inzwischen haben die Hrn. E. WIEDEMANN und EBERT im 5. Hefte der diesjährigen Annalen der Physik einen Versuch über diesen Gegenstand beschrieben. WIEDEMANN und EBERT haben den CROOKES'schen Apparat dahin abgeändert, dass sie vor der einen Schlitzöffnung des Diaphragmas einen um ein Charnier beweglichen kleinen Deckel anbrachten, der dann je nach der Stellung der Röhre den Schlitz verschloss oder frei liess. Es zeigte sich, dass bei Verschluss des einen Schlitzes und gleichzeitigem Leuchten beider Scheiben das durch den anderen Schlitz hindurchtretende Bündel ganz ebenso abgelenkt wurde, wie bei offenem Schlitz. Die Verfasser folgern daraus: „Aus den Versuchen des Hrn. CROOKES lässt sich auf eine Abstossung paralleler Kathodenstrahlen nicht schliessen“ und „Die Erscheinung hängt eng mit den von GOLDSTEIN untersuchten Deflexionserscheinungen zusammen.“ Die Hrn. WIEDEMANN und EBERT zeigen also, dass die Strahlenablenkung fort dauert, auch wenn das eine Bündel, durch welches das andere abgestossen werden soll, jenseits des Diaphragmas gar nicht mehr auftritt. Der von mir zu beschreibende Versuch zeigt, dass die Strahlenablenkung verschwindet, wenn man die Bedingungen für die Deflexion beseitigt, und dass die von CROOKES beobachtete Erscheinung darauf beruht, dass die von der einen Kathode ausgesandten Strahlen schon diesseits des Diaphragmas, wenn sie sich der andern Kathode nähern, abgestossen werden: vermöge der geradlinigen Ausbreitung der Strahlen machen auch die jenseits des Diaphragmas liegenden Fortsetzungen der Bündel dann die Ablenkung der Strahlenwurzeln mit. Ist diese Anschauung richtig, dass nicht die jenseits des Diaphragmas sich kreuzenden Strahlenbündel einander abstossen, sondern dass schon diesseits des Diaphragmas die von der einen Kathode ausgesandten Strahlen abgestossen werden von der benachbarten andern, so muss die scheinbare gegenseitige Abstossung der beiden Bündel verschwinden, wenn man zwar jenseits des Diaphragmas alles ungeändert lässt, aber diesseits desselben einen festen Schirm zwischen die beiden Kathoden bringt. Denn durch eine feste Wand wirkt die Deflexion nicht hin-



durch, weder durch eine leitende, noch durch eine isolirende; dagegen wirkt jedes Element einer Kathode durch den freien Raum hindurch nach der Richtung abstossend, nach der es strahlt. Ich brachte nun einen an einer Stricknadel befestigten rechteckigen Glimmerschirm zunächst in den Raum zwischen Gefässboden und Kathoden; der Gang aller Strahlen war dann also noch ebenso ungehindert wie in dem CROOKES'schen Versuche. Die phosphorescirende lange Platte liess ich nach dem Ergebniss von Vorversuchen fort: sie ist überflüssig, weil mindestens in den Fällen, in denen die Schlitze sich den Rändern des Diaphragmas sehr nähern oder den einen Rand durchsetzen, die Phosphoroscenzspur der Bündel sich hinreichend auf der cylindrischen Gefässwand selbst markirt. Dies gewährt zugleich den Vortheil, dass man den Verlauf der Bündel und die Lage ihres Schnittpunktes an der Gefässwand durch Tintepunkte genau markiren und daher sehr geringe Verschiebungen wahrnehmen kann.

In einem Versuche z. B. schnitten sich nun die beiden Bündel bei successivem Leuchten der einzelnen Kathoden in 25 mm Entfernung von der Kathode; leuchteten aber beide Kathoden gleichzeitig, so trat die scheinbare Abstossung ein, die gegenseitige Convergenz der beiden Bündel wurde geringer, und die Strahlen schnitten sich erst in nahe 1 dcm Entfernung vom Diaphragma; der Schnittpunkt war also um fast 75 mm verschoben. Nun wurde der Kitt, mit dem die Stricknadel in einer Verlängerung des Gefässes befestigt war, durch Erwärmen erweicht und der Glimmerschirm zwischen die beiden Kathodenscheiben bis sehr nahe an das Diaphragma vorgeschoben. Leuchteten jetzt die beiden Kathoden gleichzeitig, so lag der Schnittpunkt der beiden Strahlenbündel nur 27 mm vom Diaphragma entfernt, die Verschiebung betrug also statt nahe 75 mm nur noch 2 mm, d. h. die Ablenkung der Strahlen war so gut wie ganz aufgehoben. — Sehr anschaulich sieht man, worauf es bei dem Versuche ankommt, wenn man den Glimmerschirm zunächst wieder in den Raum hinter den Kathoden zurückzieht, sodass der Schnittpunkt wieder ca. 100 mm vom Diaphragma entfernt liegt, und wenn man dann den Schirm langsam vorschiebt. In dem Augenblick, wo die vordere Kante des Schirmes zwischen die Ränder beider Kathoden tritt, be-

ginnt der Schnittpunkt der beiden Bündel nach dem Diaphragma hin zurückzuweichen, und zieht sich, in dem Maasse, wie der Glimmer sich weiter zwischen beide Kathoden vorschiebt, immer weiter zurück, bis er bei 27 mm Halt macht, wenn man den Glimmer bis auf weniger als 1 mm dem Diaphragma genähert hat. Da jedes Element der Kathode nach der Richtung in der es strahlt, Abstossung ausübt, aber nur durch den freien Raum hindurch, wird die Anzahl der Elemente jeder Kathode die durch den freien Raum auf die Strahlen der zweiten Kathode wirken können, desto geringer, je weiter der Schirm vordringt; desto mehr nimmt daher die Ablenkung der Strahlen und somit auch die Verschiebung ihres Schnittpunktes ab. — Dass nicht Dampfentwicklung beim Erweichen des Kittes und dadurch bedingte Dichtesteigerung des Gases die Verschiebung bedingen, kann leicht nachgewiesen werden. — Den deutlichsten Beweis, dass es sich hier um eine Deflexionserscheinung handelt, bildet das Auftreten der von CROOKES ganz übersehenen zwei grossen dunklen typischen Deflexionsflächen zur Seite je einer Kathode im Phosphorescenzlicht der Gefässwand. — Zur nachträglichen Veröffentlichung des vorstehend beschriebenen Versuches wurde der Vortragende durch eine Correspondenz mit Hrn. Prof. E. WIEDEMANN veranlasst.

### **Nachtrag zur Sitzung vom 11. März 1892.**

**Hr. F. M. Stapff:**

Ueber die Zunahme der Dichtigkeit der Erde nach ihrem Inneren.

Am 11. März d. J. theilte ich der physikalischen Gesellschaft ein einfaches Gesetz der Dichtigkeitszunahme mit, welches unter einer weiter unten formulirten Voraussetzung für jeden kugelförmigen Körper gelten muss, dessen Dichtigkeit stetig von aussen nach innen zunimmt. Dass diese Bedingung für die Erde stricte zutrifft, muss zwar bezweifelt werden (CALLANDREAU kommt sogar zu dem Resultat, dass die Dichte im Inneren der Erde durch eine continuirliche Function nicht ausdrückbar ist, wenn die Beobachtungen eine von  $1/298$  nur wenig abweichende Abplattung ergeben; Compt. rend. 1885,

p. 1204); aber wenn auch die Dichtigkeit in successiven Lagen sprungweise zunimmt, muss sich eine stetige Curve ermitteln lassen, welche besser als jede andere die mittlere Dichtigkeitszunahme ausdrückt, und welche dem allgemeinen Gesetz unterworfen sein soll.

Gestattet man sich die Annahme, dass die Differenz zwischen der Dichtigkeit  $\gamma_0$  an der Oberfläche eines Kugelkernes und der mittleren Dichtigkeit  $\gamma_1$  desselben, welche Differenz an der Erdoberfläche  $= \Gamma - \Gamma_0$ , an dem Centrum aber  $= 0$  ist, mit dem Cubus des Radius des Kernes wächst, so wird

$$\gamma_0 = (2\Gamma - \Gamma_0) - (\Gamma - \Gamma_0) \frac{2r^3}{R^3},$$

worin  $\gamma_0$  die Dichtigkeit an der Oberfläche des Kernes vom Radius  $r$  bedeutet,  $\Gamma$  die mittlere Dichtigkeit der ganzen Kugel,  $\Gamma_0$  ihre Oberflächendichtigkeit,  $R$  den Radius der ganzen Kugel. Es folgt hieraus die centrale Dichtigkeit  $\Gamma_\infty = 2\Gamma - \Gamma_0$ ; und die mittlere der ganzen Kugel

$$\Gamma = \frac{\Gamma_\infty + \Gamma_0}{2}.$$

Nimmt man noch erfahrungsgemäss  $\Gamma = 2\Gamma_0$  an, so wird

$$\Gamma_\infty = \frac{3\Gamma}{2} = 3\Gamma_0;$$

und

$$\gamma_0 = \Gamma \left( \frac{3R^3 - 2r^3}{2R^3} \right).$$

Für die mittlere Dichtigkeit  $\gamma$  des Kernes ergibt sich

$$\gamma_1 = \Gamma \left( \frac{3R^3 - r^3}{2R^3} \right);$$

und für die mittlere Dichtigkeit  $\gamma$  der äusseren Schale

$$\gamma^* = \Gamma \left( \frac{2R^3 - r^3}{2R^3} \right).$$

In der Beweisführung war damals ein Irrthum untergelaufen, auf welchen Hr. Dr. F. RICHARZ mich freundlichst aufmerksam machte und welchen Rev. O. FISHER beseitigt hat, der sich auf meine Bitte mit dankenswerther Bereitwilligkeit des Problems annahm.

Wenn  $r$  um  $dr$  zunimmt, so kommt zum Kern eine dünne

Schale von der Dichtigkeit  $\gamma_0$ , welche der Entfernung  $r$  vom Centrum entspricht. Daher wird seine Masse

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \gamma_1 + 4 \pi r^2 dr \gamma_0,$$

und seine Dichtigkeit

$$\begin{aligned} \gamma_1 + d\gamma_1 &= \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \gamma_1 + 4 \pi r^2 dr \gamma_0}{\frac{4}{3} \pi (r + dr)^3} = \frac{r^3 \gamma_1 + 3 r^2 dr \gamma_0}{r^3 + 3 r^2 dr} \\ &= \left( \gamma_1 + \frac{3 dr}{r} \gamma_0 \right) \left( 1 - \frac{3 dr}{r} \right) = \gamma_1 + \frac{3 dr}{r} (\gamma_0 - \gamma_1). \end{aligned}$$

$$(1) \quad d\gamma_1 = \frac{3 dr}{r} (\gamma_0 - \gamma_1); \text{ oder } \gamma_0 - \gamma_1 = \frac{r d\gamma_1}{3 dr}.$$

An der Oberfläche, wo  $r = R$ , wird  $\gamma_1 - \gamma_0 = I - I_0$ ; am Centrum, wo  $r = 0$ , aber  $= 0$ ; und für zwischenliegende Punkte nehmen wir an, dass die Differenz mit irgend einer Potenz  $n$  von  $r/R$  wächst, also

$$(2a) \quad \gamma_1 - \gamma_0 = (I - I_0) \left( \frac{r}{R} \right)^n.$$

Die numerischen Werthe für die Oberflächendichtigkeit  $I_0$  schwanken in weiten Grenzen (v. HUMBOLDT 1,6; LAPLACE 3; PLANA 1,877; NAUMANN 2,5; AIRY und MILLER 2,56; v. WALTERSHAUSEN 2,66; MALLET 2,69; JAMES 2,75; HARKNESS (Mittelwerth)  $2,56 \pm 0,16$ ); theils, weil diese uns nächstliegende Constante nur schwierig (unter dem Meeresboden gar nicht) direct zu bestimmen ist; theils, weil ihre Definition unklar ist, insofern die Oceane bald mit berücksichtigt sind (v. HUMBOLDT, NAUMANN), bald ausgeschlossen. Letzteres ist in unserem Falle das richtige, und deshalb verdienen unter den vorstehenden die höheren Werthe den Vorzug, besonders JAMES': 2,75. Derselbe ist aber nahezu die Hälfte eines runden Werthes für die mittlere Dichtigkeit der Erde, und es dürfte angemessen sein (nach O. FISHER's Vorgang in *Physics of the Earth's crust*; I. ed., 1881, p. 20) geradezu anzunehmen, dass  $I_0 = I/2$ . Ein grösserer Fehler als durch Einführen irgend eines anderen (beobachteten?) Werthes für  $I_0$  kann dadurch nicht erwachsen; die Rechnungen gestalten sich bei dieser Annahme aber leichter und übersichtlicher. Unter dieser Annahme wird aus vorgehender Gleichung

$$(2b) \quad \gamma_1 - \gamma_0 = \left( I - \frac{I}{2} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^n = \frac{I}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^n.$$

Durch Verbindung von Gleichungen (1) und (2) folgt

$$\frac{r d\gamma_1}{3 dr} = -\frac{\Gamma}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

$$d\gamma_1 = -\frac{3\Gamma}{2r} \left(\frac{r}{R}\right)^n dr = -\frac{3\Gamma}{2} \cdot \frac{r^{n-1}}{R^n} \cdot dr.$$

Integriert:

$$(3) \quad \gamma_1 = -\frac{3\Gamma}{2n} \left(\frac{r}{R}\right)^n + C.$$

An der Oberfläche, wo  $r = 1$  und  $\gamma_1 = \Gamma$ , wird hiernach

$$\Gamma = -\frac{3\Gamma}{2n R^n} + C.$$

$$(4) \quad C = \Gamma + \frac{3\Gamma}{2n} = \Gamma \frac{(2n+3)}{2n},$$

wenn  $R=1$ . Am Mittelpunkte, wo  $\gamma_1 = \Gamma_\infty$  und  $r=0$ , wird

$$(5) \quad \Gamma_\infty = C = \Gamma \frac{(2n+3)}{2n}$$

$$2n\Gamma_\infty = 2n\Gamma + 3\Gamma.$$

$$(6) \quad n = \frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}.$$

Setzt man noch  $\Gamma_\infty = \alpha \Gamma$ , so wird

$$(6b) \quad n = \frac{3\Gamma}{2\Gamma(\alpha - 1)} = \frac{3}{2(\alpha - 1)}$$

und

$$(4b) \quad \alpha = \frac{2n+3}{2n}.$$

Durch Einführen des Werthes für die Constante  $C$  nach (4) in Gleichung (3) erfolgt

$$(7) \quad \gamma_1 = \Gamma \frac{(2n+3)}{2n} - \Gamma \frac{3}{2n} \left(\frac{r}{R}\right)^n = \Gamma \left( \frac{(2n+3)R^n - 3r^n}{2nR^n} \right)$$

und durch Substitution von

$$\gamma_0 = \gamma_1 - \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

nach Gleichung (2b) in Gleichung (7):

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \Gamma \left( \frac{(2n+3)R^n - 3r^n}{2nR^n} \right) - \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^n \\ \quad = \gamma_0 = \Gamma \left( \frac{(2n+3)R^n - (n+3)r^n}{2nR^n} \right). \end{array} \right.$$

Für  $n$  kann man in Gleichungen (7) und (8) auch  $3\Gamma/2(\Gamma_\infty - \Gamma)$  oder  $3/2(\alpha - 1)$  einführen, wonach vorgehende Gleichungen lauten

$$(7b,c) \left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= \Gamma_\infty \left( \frac{\frac{3\Gamma}{R^2(\Gamma_\infty - \Gamma)} - \frac{3\Gamma}{r^2(\Gamma_\infty - \Gamma)}}{\frac{3\Gamma}{R^2(\Gamma_\infty - \Gamma)}} \right) + \Gamma \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{3\Gamma}{2(\Gamma_\infty - \Gamma)}} \quad \text{oder} \\ \gamma_1 &= \Gamma \left( \frac{\frac{3}{\alpha R^{2(\alpha-1)}} - (\alpha-1) r^{2(\alpha-1)}}{\frac{3}{R^{2(\alpha-1)}}} \right), \end{aligned} \right.$$

resp.:

$$(8b) \quad \gamma_0 = \Gamma \left( \frac{\frac{3}{2\alpha R^{2(\alpha-1)}} - (2\alpha-1) r^{2(\alpha-1)}}{\frac{3}{2R^{2(\alpha-1)}}} \right).$$

Aus jedem der vorstehenden Ausdrücke für  $\gamma_1$  findet sich der entsprechende für  $\gamma$  (mittlere Dichte der äusseren Hülle) durch Einsetzen desselben in die Gleichung

$$(9) \quad \Gamma R^3 = \gamma_1 r^3 + \gamma (R^3 - r^3),$$

z. B. bei Benutzung von Gleichung (7):

$$\Gamma R^3 = \Gamma \left( \frac{(2n+3)R^n - 3r^n}{2nR^n} \right) r^3 + \gamma (R^3 - r^3);$$

woraus

$$\gamma = \Gamma \left( \frac{R^3 - \frac{2n+3}{2n} r^3 + \frac{3}{2n} \cdot \frac{r^{n+3}}{R^n}}{R^3 - r^3} \right).$$

$R = 1$  gesetzt:

$$(10) \quad \gamma = \Gamma \left( \frac{2n - (2n+3)r^3 + 3r^{n+3}}{2n(1-r^3)} \right)$$

Setzt man auch in Gleichung (7)  $R = 1$ , so wird

$$\gamma_1 = \Gamma \left( \frac{(2n+3) - 3r^n}{2n} \right);$$

und durch Combination mit Gleichung (10) folgt hieraus:

$$\gamma_1 - \gamma = \Gamma \left( \frac{(2n+3) - 3r^n}{2n} \right) - \Gamma \left( \frac{2n - (2n+3)r^3 + 3r^{n+3}}{2n(1-r^3)} \right)$$

$$(11) \quad \gamma_1 - \gamma = \Gamma \cdot \frac{3}{2} \frac{(1-r^n)}{n(1-r^3)}.$$

Aus Gleichungen (11) und (2b) erhalten wir noch:

$$(12) \quad \frac{\gamma^1 - \gamma}{\gamma^1 - \gamma_0} = \frac{3(1 - r^n)}{n(r^n - r^{n+3})}$$

Ursprünglich hatte ich, anstatt mit einem beliebigen Exponenten  $n$ , mit dem bestimmten Werthe  $n = 3$  operirt und war etwas umständlich zu den in der Einleitung aufgestellten Ausdrücken gekommen, welche aus den vorstehenden allgemeinen ohne weiteres folgen, wenn man in Gleichungen (7), (8), (10),  $n = 3$  setzt. Was mich veranlasste  $n = 3$  zu wählen, soll weiter unten erörtert werden; hier sei darauf hingewiesen, dass der für  $\gamma^0$  entwickelte Ausdruck mit dem auf ganz anderem Wege von LIPSCHITZ hergeleiteten übereinstimmt. Auf LIPSCHITZ' Arbeit, in CRELLE's Journal, 1862, p. 1, machte mich Hr. Dr. RICHARZ aufmerksam, als ich die eingangs stehenden Gleichungen auf meine Weise gefunden hatte. In den hier benutzten Symbolen lautet LIPSCHITZ's Ausdruck:

$$\gamma_0 = \Gamma_0 \left( \frac{(n+3) \frac{\Gamma}{\Gamma_0} - 3}{n} - \frac{(n+3) \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} - 1 \right) \left( \frac{r}{R} \right)^n}{n} \right).$$

Setzt man darin  $\Gamma_0 = \Gamma/2$ , so wird:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\Gamma}{2} \left( \frac{(n+3) 2 - 3 - (n+3) \left( \frac{r}{R} \right)^n}{n} \right) \\ &= \Gamma \left( \frac{(2n+3) R^n - (n+3) r^n}{2n R^n} \right); \end{aligned}$$

d. i. obenstehende Gleichung (8).

Bei der Wahl eines bestimmten numerischen Werthes für  $n$  können nur positive Zahlen in Betracht kommen; denn negative zwischen 0 und  $-1\frac{1}{2}$  ergeben unfassbare negative Dichtigkeiten, und negative zwischen  $-1\frac{1}{2}$  und  $-\infty$  ergeben positive Dichtigkeiten, welche gegen die Voraussetzung nach innen abnehmen. A priori möglich sind also alle ganzen oder gebrochenen Exponenten zwischen  $+0$  und  $+\infty$ . Den Zusammenhang derselben und der Coefficienten  $\alpha$ , welche ausdrücken wie viel grösser als die mittlere Dichtigkeit die jeweilige Dichtigkeit am Mittelpunkt wird, lässt folgendes Täfelchen übersehen.<sup>1)</sup>

1) Der Coefficient  $\alpha$ , welcher einem gewissen positiven Exponenten  $n$  zukommt, ergänzt sich mit dem, demselben negativen Exponenten zukommenden,  $\alpha$  stets zu 2.



$n = \pm$	0	$1/4$	$1/2$	1	$1 1/2$	2	$2 1/2$	3	$3 1/2$	4	$4 1/2$	5	$5 1/2$	6	12	24	50	100	$\infty$
$+n$	$\infty$	7	4	$2 1/2$	2	$1 3/4$	$1 3/5$	$1 1/3$	$1 3/7$	$1 3/8$	$1 1/5$	$1 3/10$	$1 3/11$	$1 1/4$	$1 1/6$	$1 1/16$	1,08	1,015	$1 +$
$\alpha$ wenn:	$\infty$	$7 -$	$4 -$	$2 1/2 -$	2	$1 3/4 +$	$1 3/5 +$	$1 1/3 +$	$1 3/7 +$	$1 3/8 +$	$1 1/5 +$	$1 3/10 +$	$1 3/11 +$	$1 1/4 +$	$1 1/6 +$	$1 1/16 +$	$1,08 +$	$1,015 +$	$1 +$
$-n$	$\infty$	5	2	$1 1/2$	0	$1 1/4$	$2/5$	$1/3$	$4/7$	$5/8$	$2/5$	$7/10$	$8/11$	$3/4$	$7/8$	$15/16$	0,97	0,985	$1 -$

Aus physikalischen Gründen ist die Reihe des Exponenten, welche wirklich in Frage kommen, weiter beschränkt. T. J. STIELTJES zeigte (Verh. en Medel. d. K. Ak. van Wetenschappen, 1885 (3) 1, p. 272; hier nach Geographisches Jahrbuch, 1887 p. 212), dass unter der Voraussetzung von  $\Gamma = 5,56$ ;  $\Gamma_0 = 2,6$ , und dem Verhältniss der beiden Hauptträgheitsmomente der Erde  $C:A = 1,00324256$ , die Dichten am Erdmittelpunkt und in halber Entfernung von der Erdoberfläche innerhalb der Grenzen  $7 < \Gamma\infty < 11$  und  $7,00 < \gamma_0$  (für  $R/2$ )  $< 7,84$  liegen müssen, oder äussersten Falles: innerhalb der Grenzen  $7,6 < \Gamma\infty < 12,2$ , und  $7,5 < \gamma_0$  für  $R/2 < 8,3$ . Nehmen wir aber auch hier  $\Gamma/\Gamma_0 = 2$  an, anstatt (wie STIELTJES)  $5,56/2,6 = 2,14$ , so werden vorstehende Grenzwerte auf ungefähr  $2,00/2,14 = 0,935$  reducirt, d. h. auf  $6,54 < \Gamma\infty < 10,28$  und  $6,54 < \gamma_0$  (für  $R/2$ )  $< 7,33$ ; oder äussersten Falles:  $7,10 < \Gamma\infty < 11,4$  und  $7,0 < \gamma_0$  (für  $R/2$ )  $< 7,76$ . Den Grenzwerten 7,1 und 11,4 für die Centraldichtigkeit kommt zu

$$\alpha \frac{7,10}{5,56} = 1,28 \dots \frac{11,4}{5,56} = 2,05$$

$$n = 5,36 \dots 1,43$$

und mit Hülfe von Gleichung (8) findet man, dass dieselben Grenzexponenten auch den Dichtheitsgrenzen in halber Entfernung von Oberfläche zu Mittelpunkt genügen.

Die meisten für den Erdmittelpunkt berechneten Dichtigkeiten<sup>1)</sup> gruppieren sich um den Mittelwerth  $10,2 \pm 0,7$  und

1) Von PLANA's Zahl 16,73 wird abgesehen, weil sie die offenbar zu niedrige Oberflächendichtigkeit 1,877 involviret. v. WALTERSHAUSEN's Formel  $\gamma_0 = \Gamma\infty - (\Gamma\infty - \Gamma_0)r^2$ , mit  $\Gamma\infty = 9,59$ ,  $\Gamma_0 = 2,66$  ist dagegen berücksichtigt. Dieselbe ist gleichfalls nur ein specieller Fall unserer Gleichung (8), welche für den Exponenten 2 lautet:

$$\gamma_0 = \Gamma \left( \frac{7R^2 - 5r^2}{4R^2} \right).$$

Dasselbe wird aus v. WALTERSHAUSEN's Gleichung, wenn in derselben  $\Gamma\infty = \alpha \Gamma$  und  $\Gamma_0 = (\Gamma/2)$ ; ferner  $\alpha = (2n + 3)/2n$  (Gleichung (4)); endlich  $n = 2$  eingesetzt wird.

setzen als mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde  $5,54 \pm 0,05$  voraus. Wären sie nach einer unserer Gleichungen, z. B. (5):

$$\Gamma_{\infty} = \Gamma \left( \frac{2n+3}{2n} \right)$$

berechnet, so hätte der Exponent  $n$  äussersten Falles zwischen 1,52 und 2,15 gewählt werden müssen, wodurch obige Grenze noch weiter eingeschnürt ist. Diese enge Begrenzung beruht aber auch darauf, dass den meisten dieser Berechnungen dieselbe Hypothese der Dichtigkeitszunahme mit zunehmendem Drucke zu Grunde liegt, und sie erweitert sich, sobald man von dieser Hypothese absieht. Mir scheint dieselbe unzulässig, theils weil sie zu der sehr unwahrscheinlichen Consequenz führt, dass die Zusammendrückbarkeit der Materie unbegrenzt ist; theils weil die Erde, soweit der Beobachtung zugänglich, aus an und für sich ungleich schweren Stoffen besteht, welche sich möglichst nach ihrem specifischen Gewicht gruppiren werden, mit oder ohne Verdichtung durch Druck. Diese Ueberlegung trieb dazu, nach einem Dichtigkeitsgesetz zu suchen, welches von der Druck- und Dichtigkeits-hypothese LAPLACE's wenigstens nicht ausgeht.

Ich habe zunächst mit dem Exponenten  $n = 3$  operirt (vgl. Einleitung und Gleichung 2b), weil derselbe in das Gefüge der, von jeder Hypothese unabhängigen, Fundamentalgleichung (9) am besten passt; zu einigen überraschend einfachen Beziehungen führt, und Dichtigkeitswerthe für das Erdinnere ergibt, welche geologisch sehr gerechtfertigt erscheinen.

Das Dichtigkeitsgesetz mit dem Exponenten  $n = 3$  ergibt als mittlere Dichtigkeit die Differenz zwischen centraler und Oberflächendichtigkeit; oder das arithmetische Mittel zwischen Oberflächendichtigkeit und Centraldichtigkeit. Denn führt man in Gleichung (8)  $n = 3$  und  $r = 0$  ein, so wird

$$\gamma_0 = \Gamma_{\infty} = \Gamma \left( \frac{(2 \cdot 3 + 3) R^3 - (3 + 3) \cdot 0}{2 \cdot 3 \cdot R^3} \right) = \Gamma \frac{9 R^3}{6 R^3} = 1\frac{1}{2} \Gamma;$$

und da nach Voraussetzung  $\frac{1}{2} \Gamma = \Gamma_0$ , so wird  $\Gamma_{\infty} = \Gamma + \Gamma_0$ , oder  $\Gamma = \Gamma_{\infty} - \Gamma_0$ . Ferner

$$\Gamma_{\infty} + \Gamma_0 = \Gamma + 2 \Gamma_0 = 2 \Gamma; \quad \frac{\Gamma_{\infty} + \Gamma_0}{2} = \Gamma.$$

Die Differenz zwischen der mittleren Dichtigkeit  $\gamma_1$  eines Kernes und der mittleren Dichtigkeit  $\gamma$  seiner Schale ist constant, nämlich  $= \Gamma/2 = \Gamma_0$ . Denn setzt man in Gleichung (11)  $n = 3$ , so wird

$$\gamma_1 - \gamma = \Gamma \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{1 - r^3}{8(1 - r^3)} \right) = \frac{\Gamma}{2}.$$

Das Verhältniss zwischen der Differenz der mittleren Dichtigkeit des Kernes und seiner Schale einerseits, der Differenz der mittleren Dichtigkeit des Kernes und seiner Oberflächendichtigkeit andererseits, nämlich (nach Gleichung 12)

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{3(1 - r^n)}{n(r^n - r^{n+3})},$$

ist für  $n = 3$

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{1}{r^3};$$

oder da hier  $R^3 = 1$  vorausgesetzt wurde,

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma_0} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Dieser Ausdruck wird aber jenem für  $\gamma_1 - \gamma_0$ , nach Gleichung (2a) analog, wenn man in ihm  $\gamma_1 - \gamma_0$  durch  $\Gamma - \Gamma_0$  ersetzt; deshalb war es angezeigt, zunächst den Exponenten  $n = 3$  in (2a) zu wählen.

Für  $\Gamma = 5,5832$  <sup>1)</sup> gibt die Formel

$$\gamma_0 = \Gamma \left( \frac{3R^3 - 2r^3}{2R^3} \right)$$

Dichtigkeiten, welche nahe der Oberfläche sehr rasch zunehmen, nahe dem Mittelpunkt aber sehr langsam:

$\frac{r}{R} =$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$\gamma_0 =$	2,792	4,305	5,517	6,460	7,169	7,677	8,018	8,224	8,330	8,369	8,375.

Die hieran sich knüpfenden geologischen Schlussfolgerungen übergehe ich aber, weil Zweckmässigkeitsgründe allein das cubische Dichtigkeitsgesetz nicht halten können, so lange seine physikalische Nothwendigkeit nicht erwiesen ist.

1) Diesen Werth REICH's benutze ich hier und im Folgenden, weil er den von HARKNESS ( $5,576 \pm 0,016$ ) und HELMERT ( $5,6 \pm 0,05$ ) berechneten Mittelwerthen der besten vorhandenen Dichtigkeitsbestimmungen am nächsten kommt.



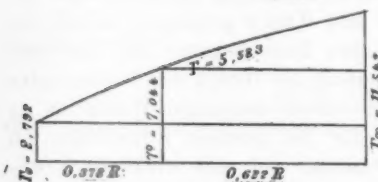
HELMERT ( $\pm 0,05$ ), soweit von dem Fehler des in Rechnung gebrachten  $\Gamma$  abgesehen wird.

Die Centraldichtigkeit  $\Gamma_\infty$  lässt sich nun empirisch und näherungsweise so bestimmen:

$$\begin{aligned}\Gamma &= 5,5832 = \frac{2}{3}(7,0444 - 2,7916)(1 - 0,6222) + (7,0444 \\ &\quad - 2,7196) \cdot 0,6222 + \frac{2}{3}(\Gamma_\infty - 7,0444) \cdot 0,6222 \\ 5,5832 &= 0,4148 \Gamma_\infty + 0,7954 \\ \Gamma_\infty &= 11,5424.\end{aligned}$$

Die Centraldichtigkeit ist also

$$\frac{11,5424}{5,5832} = 2,0673$$



mal so gross als die mittlere Dichtigkeit  $\Gamma$ , und diesem Coefficienten  $\alpha$  entspricht nach Gleichung (6) der Exponent

$$n = \frac{3}{2(2,0673 - 1)} = 1,4054$$

oder rund  $\frac{7}{5}$ .

Der verlockende Exponent 3 ist also nicht stichhaltig. Anstatt des hier roh geschätzten Werthes 1,4054 ergibt sich, ohne Zuziehung einer physikalischen Hypothese, ein richtigerer Exponent durch Umkehrung der Gleichung (8):

$$\gamma_0 = \Gamma \left( \frac{(2n+3)R^n - (n+3)r^n}{2nR^n} \right),$$

wenn darin  $\gamma_0$ ,  $\Gamma$ ,  $r$  als bekannt angenommen, und  $R = 1$  gesetzt wird; nämlich:

$$(14) \quad \frac{2(\gamma_0 - \Gamma)}{\Gamma} = \frac{3 - (3+n)r^n}{n}.$$

Für  $r = 0,6222$  haben wir  $\gamma_0 = 7,0444$  gefunden; für  $\Gamma = 5,5832$  gewählt; und als ersten Näherungswerth für  $n$  benutzen wir 1,4054. Dieser zeigt sich zu gross, 1,3 zu klein; dagegen ist bis auf die vierte Decimale (excl.) zutreffend  $n = 1,3238$ . Probe:

$$\frac{2(7,0444 - 5,5832)}{5,5832} = \frac{3 - (3 + 1,3238) \cdot 0,6222^{1,3238}}{1,3238}$$

$$0,5234 = 0,52334.$$

Diesem  $n$  kommt nach Gleichung (4) der Werth

$$\alpha = \frac{2n+3}{2n} = \frac{2,6476+3}{2,6476} = 2,1331$$

zu; daher Centraldichtigkeit:

$$\Gamma_{\infty} = 5,5832 \cdot 2,1331 = 11,9095.$$

Das Dichtigkeitsgesetz (8) mit dem Exponenten  $n = 1,3238$  lautet:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= \Gamma \left( \frac{(2,6476+3) - (1,3238+3)r^{1,3238}}{2,6476} \right) \\ &= \Gamma(2,1331 - 1,6331 \cdot r^{1,3238}), \\ \text{oder, wenn man sich die Abrundung } 1,3238 &= \frac{4}{3} \text{ er-} \\ \text{lauben dürfte:} \\ \gamma_0 &= \Gamma \left( \frac{(\frac{6}{3}+3) - (\frac{4}{3}+3) \cdot r^{\frac{4}{3}}}{\frac{6}{3}} \right) = \Gamma \left( \frac{17-13 \cdot r^{\frac{4}{3}}}{8} \right) \\ &= \Gamma(2,125 - 1,625 \cdot r^{\frac{4}{3}}). \end{aligned} \right.$$

Die einzige unbewiesene Voraussetzung ist hierbei, dass Oberflächendichtigkeit gleich halber mittlerer Dichtigkeit; doch ist zu bemerken, dass ein Werth  $\gamma_0$ , welchem viele Werthe von  $n$  nahezu entsprechen können, zur Ermittlung des Exponenten  $n$  nach dieser Methode weniger geeignet ist; ferner, dass der Mittelzahl  $\gamma_0 = 7,0444$  noch ein zweiter Werth für  $n$  zukommt.

## Mitgliederliste.

Im Jahre 1892 wurden in die Gesellschaft aufgenommen die Herren:

Dr. W. BEIN, Dr. R. BURG, H. HAHN und Dr. B. METH.

Dagegen verlor die Gesellschaft durch Tod:

Prof. Dr. E. v. BRÜCKE und Dr. WEHN. v. SIEMENS.

Ihren Austritt aus der Gesellschaft erklärten die Herren:

Prof. Dr. F. AUGUST, Prof. Dr. A. AUWERS, Prof. Dr. R. FRANZ,

Dr. F. JAGOR, Dr. R. LÜPKE und Dr. TEGETMEIER.

Am Ende des Jahres 1892 waren Mitglieder der Gesellschaft:

- |   |  |
|---|--|
| <p>Hr. Prof. Dr. ADAMI in Bayreuth.<br/>           — Dr. P. ANDRIES<sup>*)</sup>, SW., Zimmerstrasse 48a.<br/>           — Prof. K. ÅNGSTRÖM in Stockholm, Stockholm's Högskola.<br/>           — Prof. Dr. H. ARON, W., Lichtensteinallee 3a.<br/>           — Dr. L. ARONS, SW., Königgrätzerstrasse 109.<br/>           — ARTOPE in Elberfeld.<br/>           — Prof. Dr. R. ASSMANN, NW., Thurnstrasse 28.<br/>           — Dr. E. VAN AUBEL in Brüssel, Rue royale 3.<br/>           — Prof. Dr. AVENARIUS in Kiew.<br/>           — O. BASCHIN, C., Schinkelplatz 6.<br/>           — Dr. BECKER in Darmstadt.<br/>           — Dr. W. BEIN, NW., Karlstr. 18a.<br/>           — P. BENOIT, SW., Wartenburgstrasse 23.<br/>           — A. BERBERICH, SW., Lindenstr. 91.<br/>           — Dr. A. BERLINER in Charlottenburg, Knesebeckstrasse 3.<br/>           — Dr. G. BERTHOLD in Ronsdorf.<br/>           — Prof. Dr. W. v. Bezold, W., Lützowstrasse 72.<br/>           — A. BLÜMEL, SO., Melchiorstr. 22.<br/>           — Dr. H. BORCK in Friedenau, Handjerystrasse 47.<br/>           — Prof. Dr. R. BÜRNSTEIN, Wilmersdorf, Hessische Strasse 10.<br/>           — Dr. H. BÜTTGER, NW., Lessingstrasse 13.<br/>           — Dr. H. E. J. G. DU BOIS, NW., Mittelstrasse 48.<br/>           — A. DU BOIS-REYMOND in Westend bei Berlin, Ahorn-Allee 42.<br/>           — Prof. Dr. E. DU BOIS-REYMOND, NW., Neue Wilhelmstrasse 15.<br/>           — Prof. Dr. L. BOLTZMANN in München, Maximilianstrasse 1 III.<br/>           — Prof. Dr. F. BRAUN in Tübingen.<br/>           — Prof. Dr. A. BRILL in Darmstadt.</p> | <p>Hr. Dr. W. BRIX in Charlottenburg, Berliner Strasse 13/14.<br/>           — Dr. W. BRIX jun., SW., Schützenstrasse 3.<br/>           — Dr. E. BRODHUN in Charlottenburg, Leibnitzstrasse 66.<br/>           — Telegraphendirector BRUNNER in Wien.<br/>           — Prof. Dr. BRUNS in Leipzig.<br/>           — Dr. E. BUDDE, NW., Klopstockstrasse 53.<br/>           — Prof. Dr. F. BURCKHARDT in Basel.<br/>           — Dr. R. BURG, NW., Mittelstr. 3.<br/>           — Dr. M. BUSOLT, W., Steglitzerstrasse 55.<br/>           — Dr. F. CASPARY, W., Kurfürstenstrasse 4.<br/>           — Prof. Dr. E. B. CHRISTOFFEL in Strassburg i. E.<br/>           — Prof. Dr. O. CHWOLSON in St.-Petersburg.<br/>           — Dr. DEHMS in Potsdam.<br/>           — Prof. Dr. C. DIETERICH in Breslau.<br/>           — Prof. Dr. DIETRICH in Stuttgart.<br/>           — Dr. P. DRUDE in Göttingen.<br/>           — Dr. A. EBELING, W., Derfflingerstrasse 28.<br/>           — Prof. Dr. E. O. ERDMANN, W., Schellingstrasse 7.<br/>           — F. ERNECKE, SW., Königgrätzerstrasse 112.<br/>           — Dr. M. ESCHENHAGEN in Potsdam, Magnetisches Observatorium.<br/>           — Dr. C. FÄRBER, SO., Elisabethufer 41.<br/>           — Dr. K. FEUSSNER in Charlottenburg, Leibnitzstrasse 1.<br/>           — Prof. Dr. A. FICK in Würzburg.<br/>           — Prof. Dr. R. FINKENER, W., Burggrafenstrasse 2a.<br/>           — Dr. A. FRANKE, NW., Cuxhavenerstrasse 3.</p> |
|---|--|

<sup>\*)</sup> Berlin ist in dem Verzeichniss weggelassen.



- Hr. Dr. G. FREUND, NW., Unter den Linden 69.
- Dr. O. FRÜLICH, Westend bei Berlin, Kastanien-Allee 2.
- Prof. Dr. FROMME in Giessen.
- Prof. Dr. L. FUCHS, NW., Kronprinzenufer 24.
- R. FUSS in Steglitz, Düntherstrasse 8.
- Prof. Dr. J. GAD, SW., Grossbeerenstrasse 67.
- Dr. H. GERSTMANN, SW., Schöneberger Ufer 17.
- Dr. W. GIESE, W., Bülowstr. 80.
- Dr. P. GLAN, NW., Klopstockstrasse 65.
- Prof. Dr. E. GOLDSTEIN, W., Königsgrätzerstrasse 92.
- Dr. L. GRÄTZ in München; Arcisstrasse 33.
- Dr. Th. GROSS, W., Blumenthalstrasse 11.
- Prof. Dr. P. GROTH in München.
- Prof. Dr. GROTHIAN in Aachen.
- Prof. Dr. L. GRUNMACH, W., Schellingstrasse 5.
- Prof. Dr. G. GRUSS in Prag.
- Prof. Dr. S. GÜNTHER in München.
- Dr. E. GUMMICH in Charlottenburg, Grolmannstrasse 11.
- H. HÄNSCH, S., Stallschreiberstr. 4.
- Dr. E. HÄNTZSCHEL, W., Eisenacherstrasse 11.
- Prof. Dr. E. HAGEN in Kiel.
- Prof. Dr. E. HAGENBACH-BISCHOFF in Basel.
- H. HAHN, NW., Melanchthonstrasse 12.
- Prof. Dr. M. HAMBURGER, NW., Karlstrasse 28.
- Prof. Dr. HAMMERL in Innsbruck.
- G. HANSEMAN, W., Maassenstrasse 29.
- Prof. Dr. G. HAUCK, W., Bülowstrasse 6.
- Dr. B. HECHT in Königberg i. Pr.
- F. v. HEFNER-ALTENECK, W., Hildebrand'sche Privatstrasse 9.
- Prof. Dr. G. HELLMANN, W., Margarethenstrasse 2/3.
- Prof. Dr. H. v. HELMHOLTZ, Charlottenburg, Marchstr. 25 b.
- Dr. A. HEMPEL, W., Bülowstr. 72.
- Prof. Dr. K. HENSEL, NW., Klopstockstrasse 39.
- Prof. Dr. H. HERTZ in Bonn.
- Dr. A. HEYDWEILLER in Würzburg.
- Hr. Prof. Dr. J. HIRSCHWALD in Charlottenburg, Hardenbergstr. 9.
- Dr. H. HOHNHORST, SW., Bellealliancestrasse 8.
- Dr. K. HOLLEFREUND, S., Luisenufer 23.
- Prof. Dr. R. HOPPE, S., Prinzenstrasse 69.
- Dr. W. HOWE in Westend bei Berlin, Kastanienallee 4.
- Prof. Dr. HUTT in Bernburg.
- Dr. W. JAEGER in Charlottenburg, Leibnitzstrasse 65.
- Dr. H. JAHN, NW., Hindersinstrasse 1.
- Dr. S. KALISCHER, W., Lutherstrasse 51.
- Prof. Dr. G. KARSTEN in Kie..
- Prof. Dr. H. KAYSER in Hannover.
- Prof. Dr. E. KETTELER in Münster i. W.
- Prof. Dr. J. KIESSLING in Hamburg.
- Prof. Dr. F. KLEIN in Göttingen.
- Prof. Dr. H. KNOBLAUCH in Halle.
- Prof. Dr. A. KÖNIG, NW., Flemmingstrasse 1.
- Prof. Dr. W. KÖNIG in Frankfurt a. M.
- Dr. M. KOPPE, NO., Strausbergerstrasse 7a.
- Dr. A. KÜPSEL, S., Kommandantenstrasse 46.
- Dr. F. KÜTTER, S., Annenstr. 1.
- Prof. Dr. F. KOHLRAUSCH in Strassburg i. E.
- Prof. Dr. W. KOHLRAUSCH in Hannover.
- Prof. Dr. G. KRECH, S., Brandenburgstrasse 34.
- Dr. V. KREMSEK in Friedrichshagen.
- Dr. O. KRIGAR-MENZEL, W., Sigismundstrasse 3.
- Prof. Dr. H. KRONECKER in Bethl.
- Prof. Dr. A. KUNDT, NW., Neue Wilhelmstrasse 16.
- Dr. G. LACHMANN, SW., Puttkammerstrasse 10.
- Prof. Dr. E. LAMPE, W., Kurfürstenstrasse 139.
- Prof. Dr. H. LANDOLT, W., Königsgrätzerstrasse 123 b.
- Prof. Dr. C. LANGE, W., Kleiststrasse 5.
- Dr. J. LANGE, SW., Mückernstrasse 85.

- Hr. Prof. Dr. A. LEMAN in Charlottenburg, Leibnitzstrasse 66.  
 — Dr. E. LESS, NW., Albrechtstrasse 18.  
 — Prof. Dr. LIEBISCH in Göttingen.  
 — Prof. Dr. O. LIEBREICH, W., Margarethenstrasse 7.  
 — Dr. St. LINDECK in Charlottenburg, Göthestrasse 66.  
 — Dr. E. LOEW, SW., Grossbeerenstrasse 1.  
 — Prof. Dr. C. LUDWIG in Leipzig.  
 — Prof. Dr. E. LOMMEL in München, Kaiserstrasse 10.  
 — Prof. Dr. H. A. LORENTZ in Leyden.  
 — Dr. G. LÜBECK, N., Prenzlauer Allee 2.  
 — Dr. O. LUMMER in Charlottenburg, Leibnitzstrasse 72.  
 — Dr. B. METI, W., Eisenacherstrasse 11.  
 — Dr. ERNST MEYER, SW., Möckernstrasse 121.  
 — Dr. G. MEYER in Freiburg i. B.  
 — Dr. H. MEYER, W., Derfflingerstrasse 28.  
 — Prof. Dr. O. E. MEYER in Breslau.  
 — Dr. W. MEYER, W., Kurfürstenstrasse 101.  
 — Dr. C. MICHAELIS in Potsdam.  
 — Dr. P. MÜCKE, W., Kleiststr. 18/19.  
 — Dr. JAMES MOSER in Wien.  
 — Prof. Dr. F. MÜLLER, NW., Birkenstrasse 3.  
 — Dr. R. MÜLLER, W., Wilhelmstrasse 40.  
 — Dr. W. MÜLLER-ERZBACH in Bremen.  
 — Prof. Dr. A. MÜTTRICH in Eberswalde.  
 — Prof. Dr. H. MUNK, W., Matthäikirchstrasse 4.  
 — Dr. R. NAHRWOLD in Charlottenburg, Knesebeckstrasse 91.  
 — Prof. Dr. F. NEESEN, W., Zietenstrasse 6 c.  
 — Prof. Dr. W. NERNST in Göttingen.  
 — Prof. NEUBERT in Dresden.  
 — Prof. Dr. C. NEUMANN in Leipzig.  
 — Prof. Dr. A. OBERBECK in Greifswald.  
 — Prof. Dr. A. v. OETTINGEN in Dorpat.  
 — Prof. Dr. PAALZOW, W., Wilhelmstrasse 50.  
 — Prof. Dr. J. PERNET in Zürich-Hottingen, Minervastrasse.
- Hr. Prof. Dr. F. PETRI, SO., Köpenickerstrasse 22a.  
 — Prof. Dr. L. PFAUNDLER in Innsbruck.  
 — Dr. J. PICKER in GROSS-Lichterfelde, Zehlendorferstr. 41/44.  
 — Prof. RAOUL PICTET, C., Neue Promenade 3.  
 — Prof. Dr. M. PLANCK, W., Eisenacherstrasse 5.  
 — Prof. Dr. L. POCHHAMMER in Kiel.  
 — Dr. F. PÖCKELS in Göttingen.  
 — Dr. F. POSKE, SW., Hallesche Strasse 21.  
 — Prof. Dr. W. PREYER, W., Nollendorfplatz 1.  
 — Dr. E. PRINGSHEIM, NW., Kronprinzenufer 25.  
 — Prof. Dr. N. PRINGSHEIM, W., Königin Augusta-Strasse 49.  
 — Dr. M. PRYTZ in Kopenhagen, Falkonergaardsvej 12.  
 — Prof. Dr. G. QUINCKE in Heidelberg.  
 — Dr. R. RADAU in Paris.  
 — Dr. A. RAFS, NW., Neue Wilhelmstrasse 16a.  
 — Prof. Dr. RECKENAGEL in Kaiserslautern.  
 — Prof. Dr. O. REICHEL in Charlottenburg, Berlinerstrasse 90.  
 — Dr. W. REISS, W., Kurfürstenstrasse 98.  
 — Dr. F. RICHARZ in Emdenich bei Bonn.  
 — Dr. E. RICHTER, Charlottenburg, Kantstrasse 52.  
 — Prof. Dr. E. RIECKE in Göttingen.  
 — Dr. R. RITTER, NW., Herwarthstrasse 3a.  
 — Dr. H. ROHRBECK, NW., Karlstrasse 24.  
 — Prof. Dr. J. ROSENTHAL in Erlangen.  
 — Director Dr. F. ROTH in Leipzig.  
 — Dr. H. RUBENS, W., Bellevuestrasse 15.  
 — Prof. Dr. FR. RÜDORFF in Charlottenburg, Marchstrasse 7c.  
 — Prof. Dr. RÜHLMANN in Chemnitz.  
 — Prof. Dr. C. RUNGE in Hannover.  
 — Prof. Dr. SAALSCHÜTZ in Königsberg in Pr.  
 — Dr. P. SCHAFFHEITLIN in Charlottenburg, Joachimthalerstr. 1.  
 — Dr. K. SCHEEL in Charlottenburg, Marchstrasse 25.

Köpe-  
Inns-  
chter-  
/44.  
Neue  
Eise-  
Kiel.  
ngen.  
lesche  
W.,  
Kron-  
W.,  
49.  
nagen,  
a Hei-  
e Wil-  
aisers-  
Char-  
se 90.  
irsten-  
denich  
enburg,  
ingen.  
warth-  
Karl-  
in Er-  
eipzig.  
llevue-  
Char-  
7e.  
ennitz.  
Hau-  
Königs-  
Char-  
str. 1.  
lotten-

- Hr. Dr. J. SCHEINER in Potsdam,  
Astrophysikal. Observatorium.  
— Dr. R. SCHELSKE, NW., Bee-  
thovenstrasse 3.  
— Dr. V. SCHEMMEL, SW., Tel-  
towerstrasse 47/48.  
— Dr. SCHENK, SW., Grossbeeren-  
strasse 17a.  
— Prof. Dr. K. SCHERING in Darm-  
stadt.  
— M. SCHLEGEL, W., Bellevue 15.  
— Dr. SCHÖNACH in Innsbruck.  
— Prof. Dr. J. SCHOLZ, S. Hasen-  
heide 54.  
— Dr. P. SCHOLZ in Steglitz.  
— F. SCHOTTE, SW., Grossbeeren-  
strasse 27a.  
— Dr. P. SCHOTTLÄNDER in Char-  
lottenburg, Göthestrasse 87.  
— Dr. SCHÜLKE in Osterodein O./Pr.  
— Dr. F. SCHULZE-BERGE in New-  
York, Menlo Park.  
— Prof. Dr. A. SCHUMANN, SW.,  
Wartenburgstrasse 21.  
— Prof. Dr. B. SCHWALBE, NW.,  
Georgenstrasse 30/31.  
— R. SEEBOLD, W., Landgrafen-  
strasse 16.  
— Dr. SELL in Charlottenburg,  
Schlüterstrasse 73.  
— Dr. G. SIEBEN in Gross-Lichter-  
felde.  
— WIL. V. SIEMENS, W., König-  
grätzerstrasse 2/3.  
— Prof. Dr. P. SILOW in Warschau.  
— Dr. W. SKLAREK, W., Lützow-  
strasse 63.  
— Prof. Dr. A. SLABY in Charlotten-  
burg, Sophienstrasse 4.  
— Dr. P. SPIES, NW., Brücken-  
allee 35.  
— Prof. Dr. G. SPÖRER in Potsdam,  
Astrophysikal. Observatorium.  
— Prof. Dr. A. SPRUNG, in Potsdam,  
Meteorol.-magnet. Observat.  
— Dr. F. M. STAFFF in Weissensee,  
Berlinerstrasse 3.  
— Dr. STEINER in Erlangen.  
— Prof. Dr. F. STENGER in Dresden.  
— Dr. K. STRECKER, W., Bülow-  
strasse 51.  
— Prof. Dr. V. STROUHAL in Prag,  
Clementinum.  
— Dr. R. SÜRING in Potsdam, Me-  
teorol.-magnet. Observat.  
— Dr. THEURER in Prag.

- Hr. Prof. Dr. M. THIESEN in Fried-  
richshagen, Ahornallee 10.  
— Dr. B. v. TIETZEN-HENNIG, NW.,  
Cuxhavenerstrasse 5.  
— Prof. H. THUREIN, N., Chaussee-  
strasse 40.  
— Prof. Dr. J. TYNDALL in London,  
Albemarlestreet 22.  
— Dr. Fr. VETTING, SW., Bernburger-  
strasse 24.  
— Prof. Dr. R. VIRCHOW, W., Schel-  
lingstrasse 10.  
— Prof. Dr. H. C. VOGEL in Pots-  
dam, Astrophysikal. Observat.  
— Prof. Dr. H. W. VOGEL, W.,  
Kurfürstenstrasse 124.  
— Prof. Dr. P. VOLKMANN in Königs-  
berg i. Pr.  
— Dr. E. WAGNER in Breslau.  
— Prof. Dr. E. WARBURG in Frei-  
burg i. Br.  
— Prof. Dr. A. WANGERIN in Halle  
a. S., Burgstrasse 27.  
— Dr. C. L. WEBER in München,  
Brienerstrasse 35.  
— Prof. Dr. H. F. WEBER in Zürich.  
— Prof. Dr. L. WEBER in Kiel.  
— Dr. W. WEDDING, W., Lützow-  
platz 10.  
— Prof. Dr. K. WEIERSTRASS, W.,  
Friedrich Wilhelmstrasse 14.  
— Prof. Dr. J. WEINGARTEN, W.,  
Regentenstrasse 14.  
— Dr. B. WEINSTEIN, S., Urbanstr. 1.  
— Dr. C. WELTZIEN in Zehlendorf.  
— Dr. K. WESENDONCK, W., Wil-  
helmstrasse 66.  
— F. WIEBE, W., Burggrafenstr. 8.  
— Dr. E. WIECHERT in Königsberg  
i. Pr.  
— Prof. Dr. G. WIEDEMANN in  
Leipzig, Thalstrasse 35.  
— Prof. Dr. E. WIEDEMANN in Er-  
langen.  
— Dr. W. WIEN in Westend bei  
Berlin, Rüsternalle 8.  
— Dr. O. WIENER in Strassburg i. E.  
— Dr. J. WILSING in Potsdam,  
Astrophysikal. Observatorium.  
— Dr. W. WOLFF in Charlotten-  
burg, Joachimsthalerstr. 43.  
— Prof. Dr. J. WOPITZKY, N.,  
Krausnikstrasse 19.  
— Prof. Dr. A. WÜLLNER in Aachen.  
— R. WURTZEL, NW., Luisenstr. 62.  
— Prof. Dr. W. v. ZAHN in Leipzig.

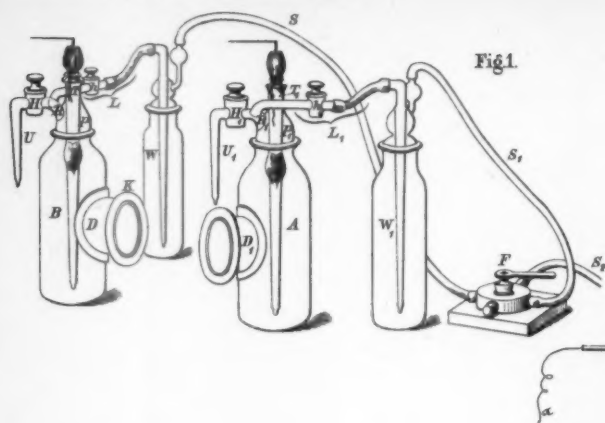


Fig. 1.



Fig. 3.



Fig. 2.

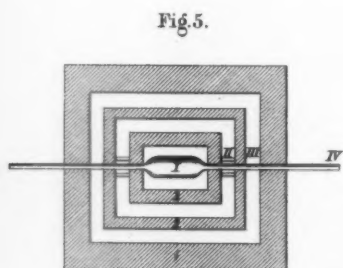


Fig. 5.

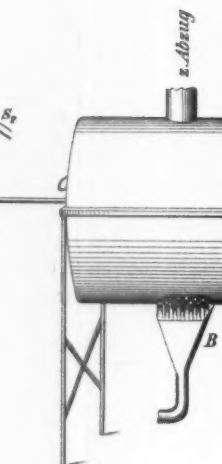
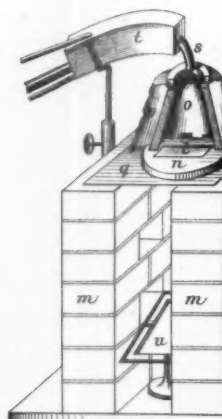


Fig. 7.



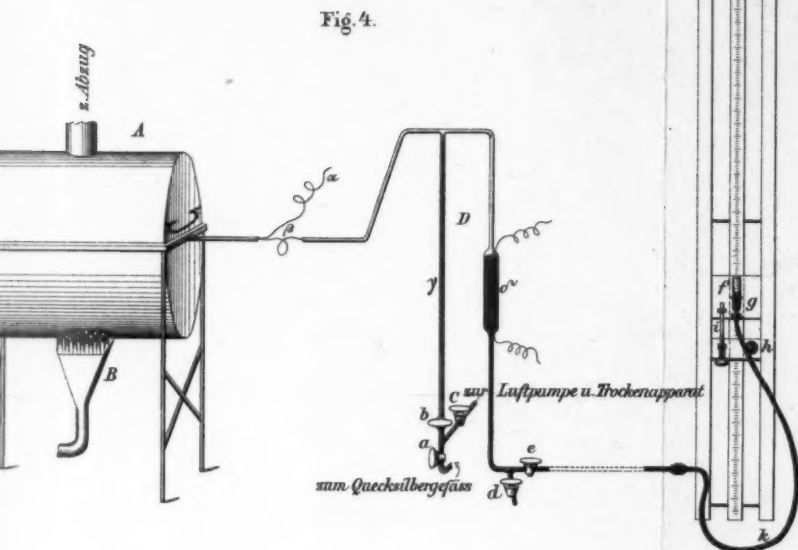


Fig. 4.

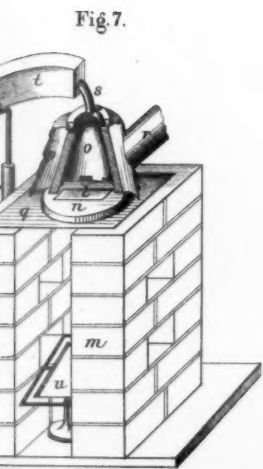


Fig. 7.

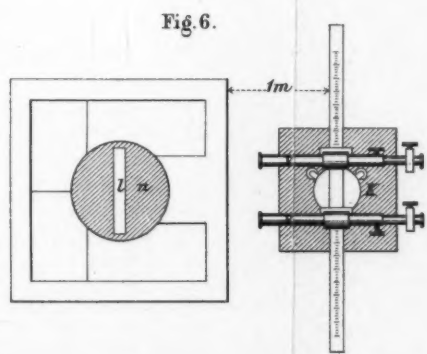
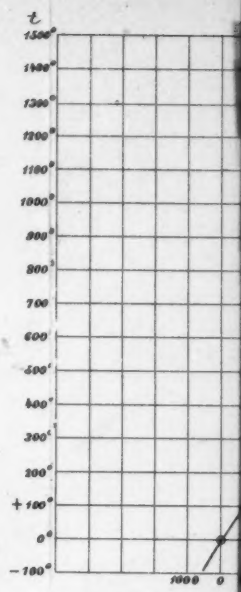


Fig. 6.



Saxén Fig. 1-3. Holborn und Wien Fig. 4-9.



Fig. 8.

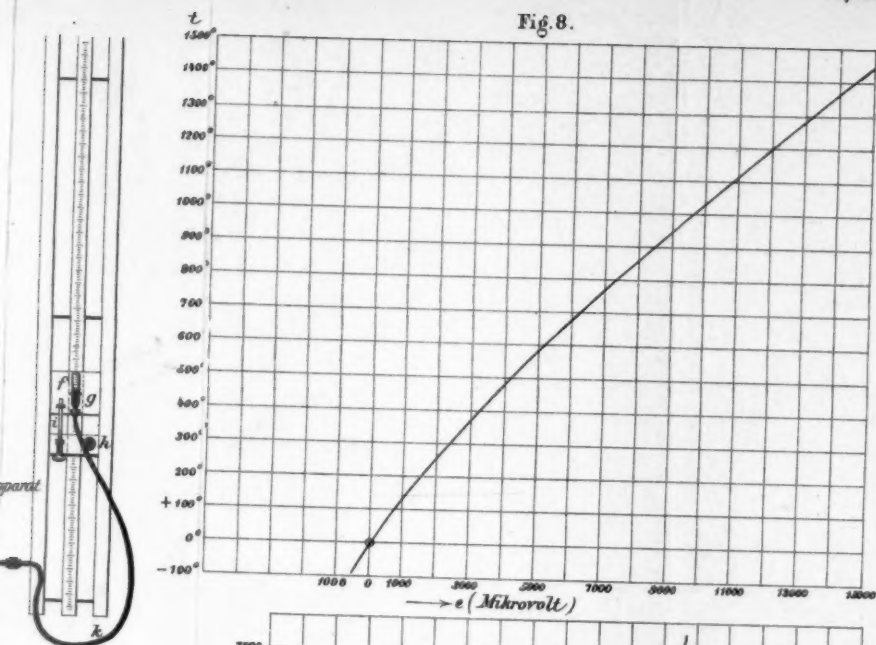


Fig. 9.

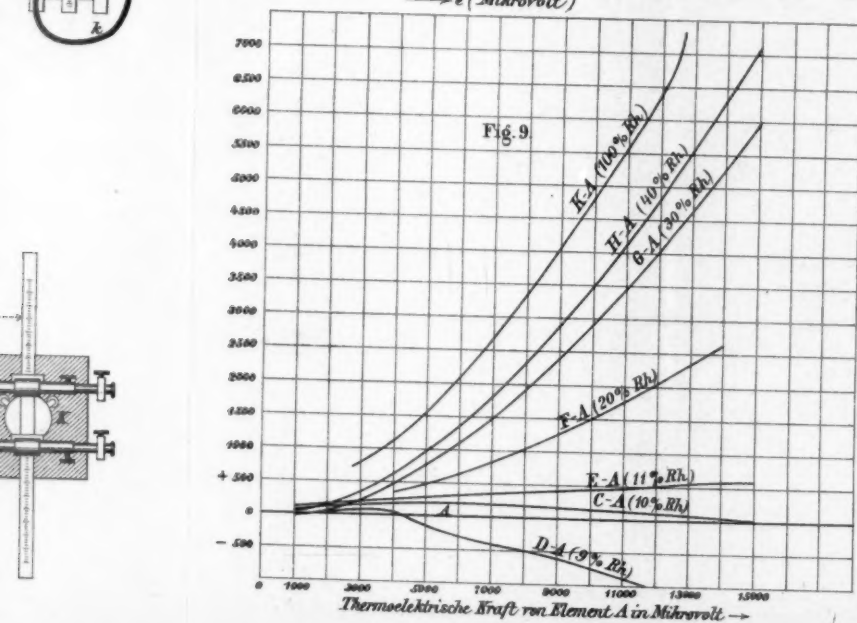




Fig. 3.

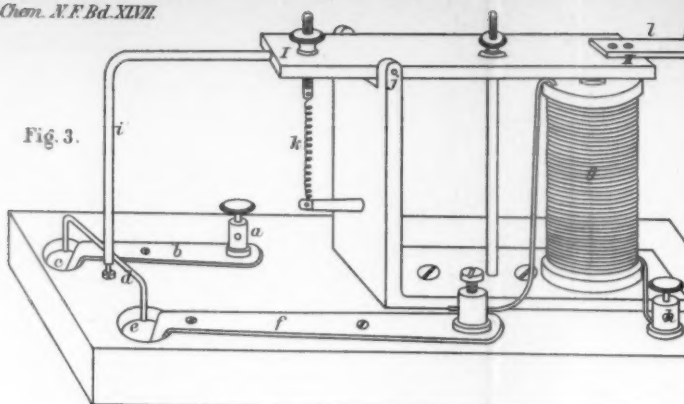


Fig. 1.

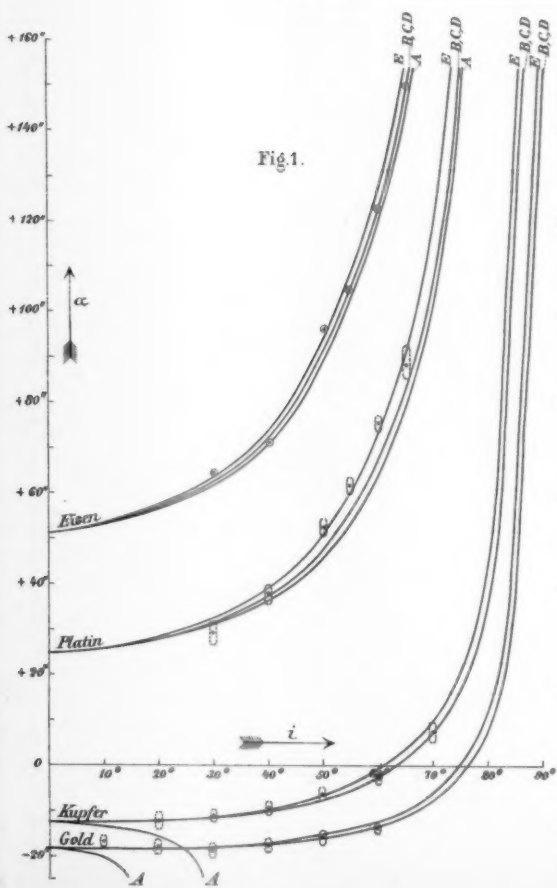
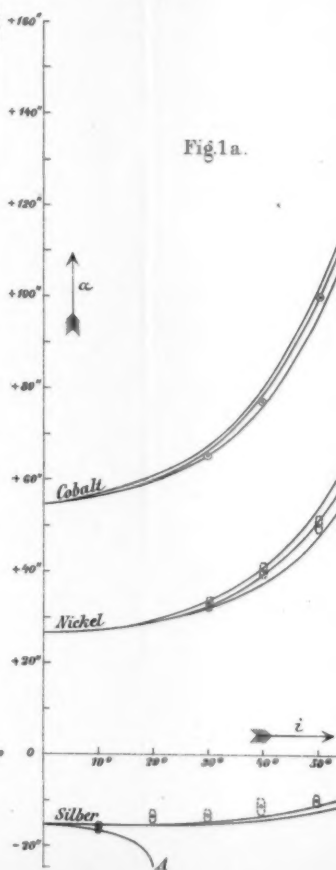
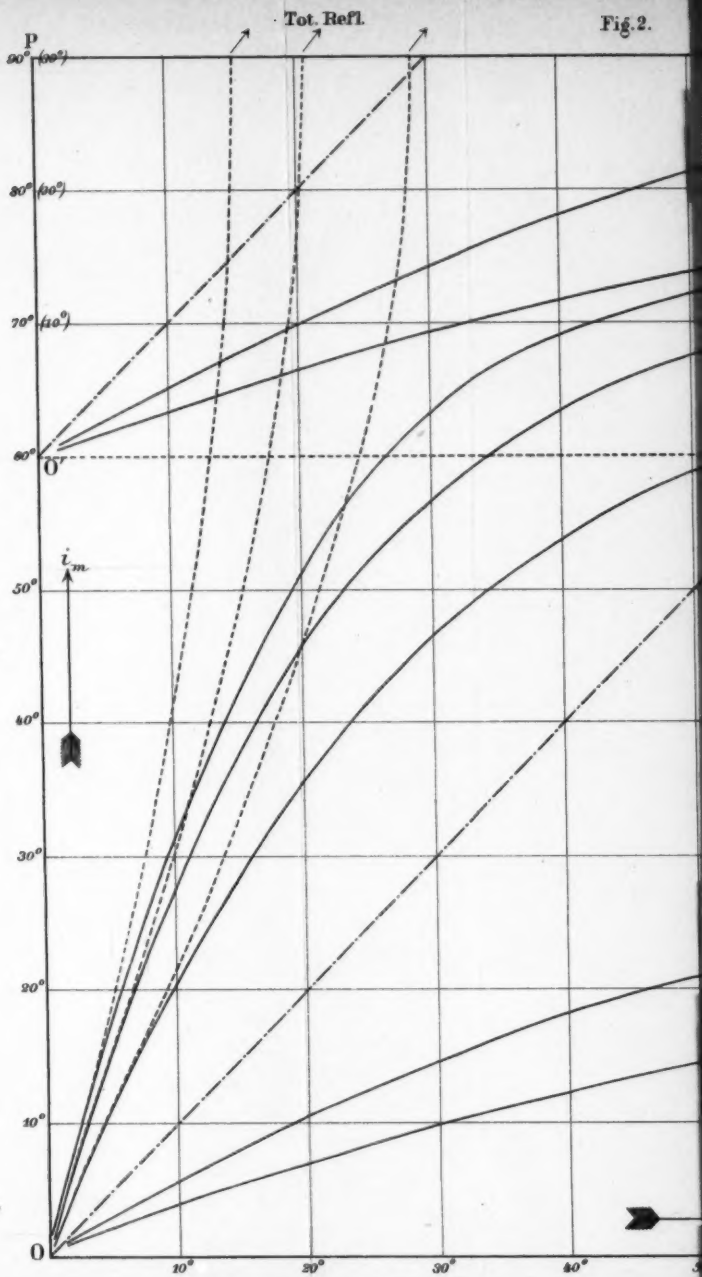
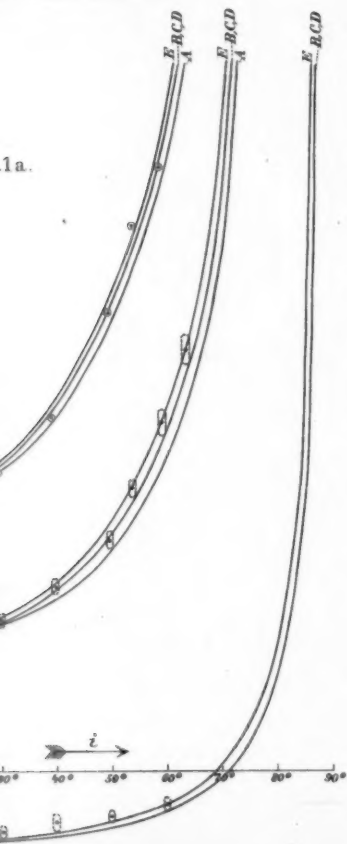
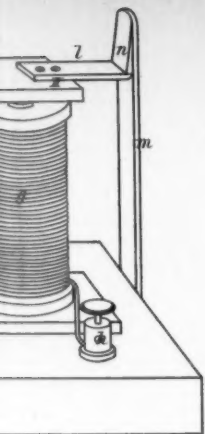


Fig. 1a.





Shea Fig.1-1a. H.E.J. G. du Bois u. Rubens Fig.2. Ebert Fig.3.

(rothe)

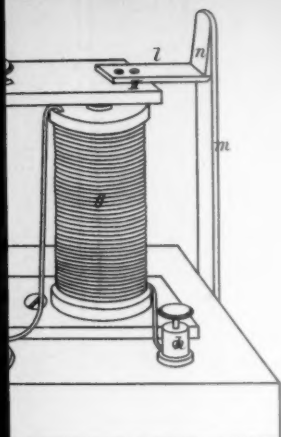
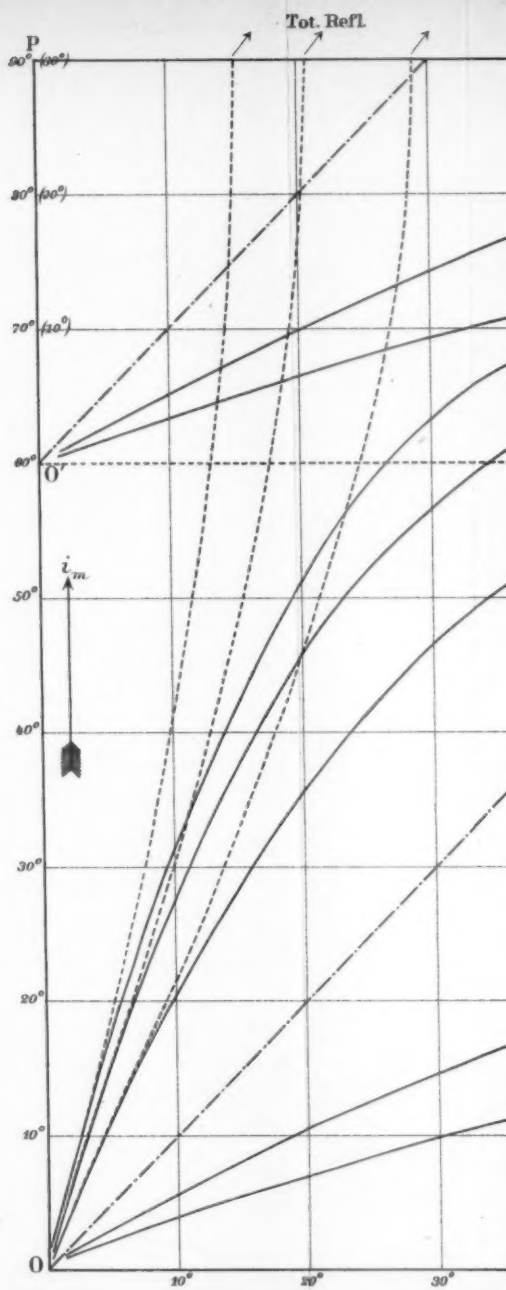
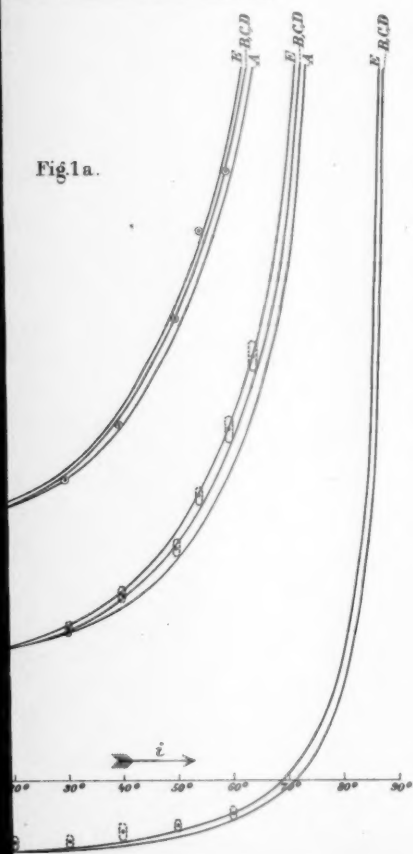


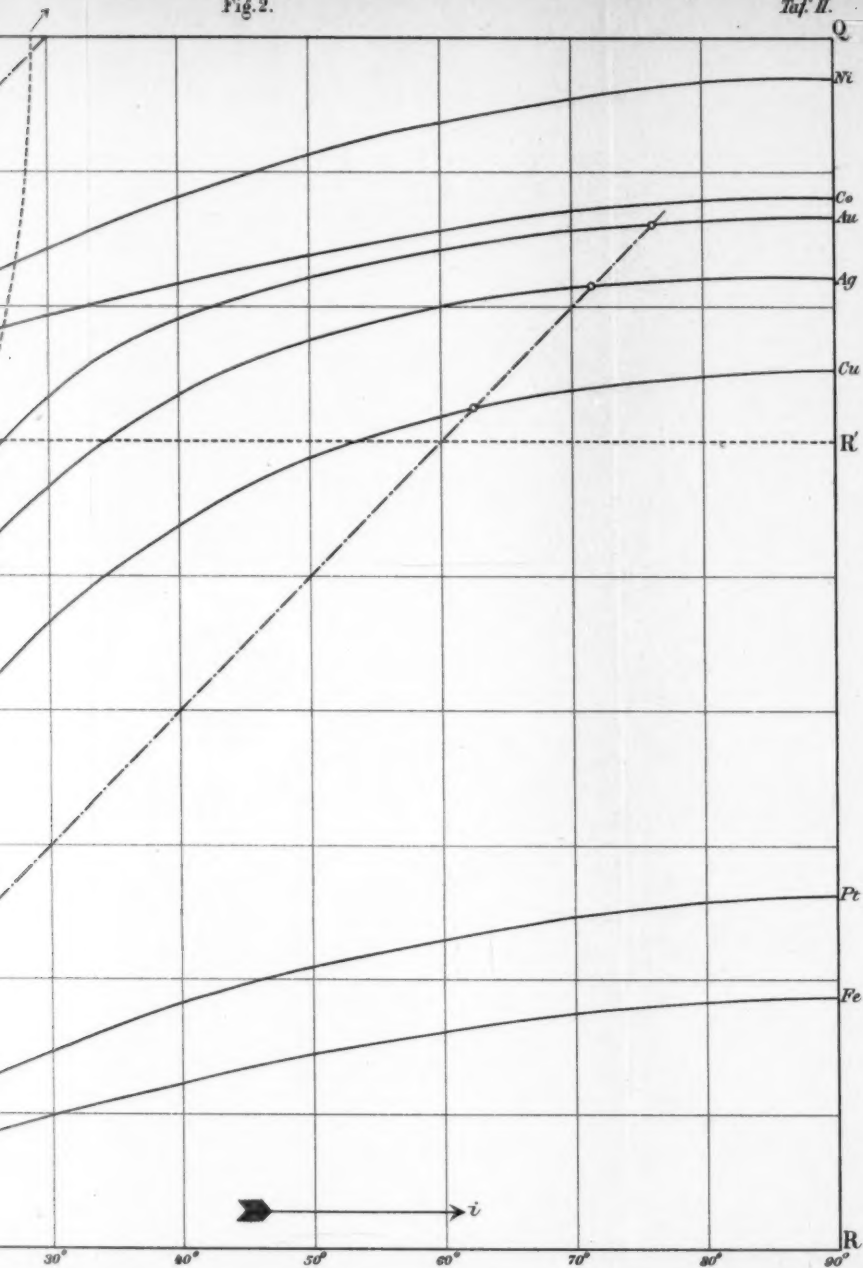
Fig 1a.



Shea Fig.1-1a. H.E.J.G. du Bois u. Rubens Fig.2. Ebert Fig.3.

Fig. 2.

Taf. II.



ert Fig. 3.

(rothes Licht)

Lith.-Anst. v. C. Kist, Leipzig.

Fig. 1.

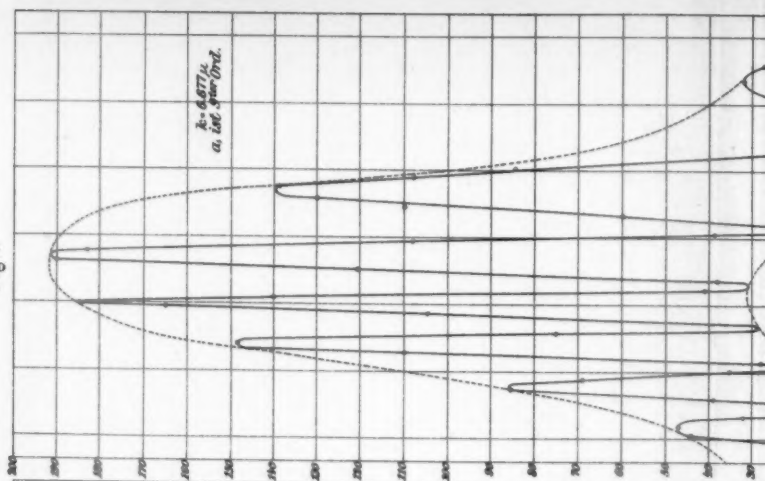
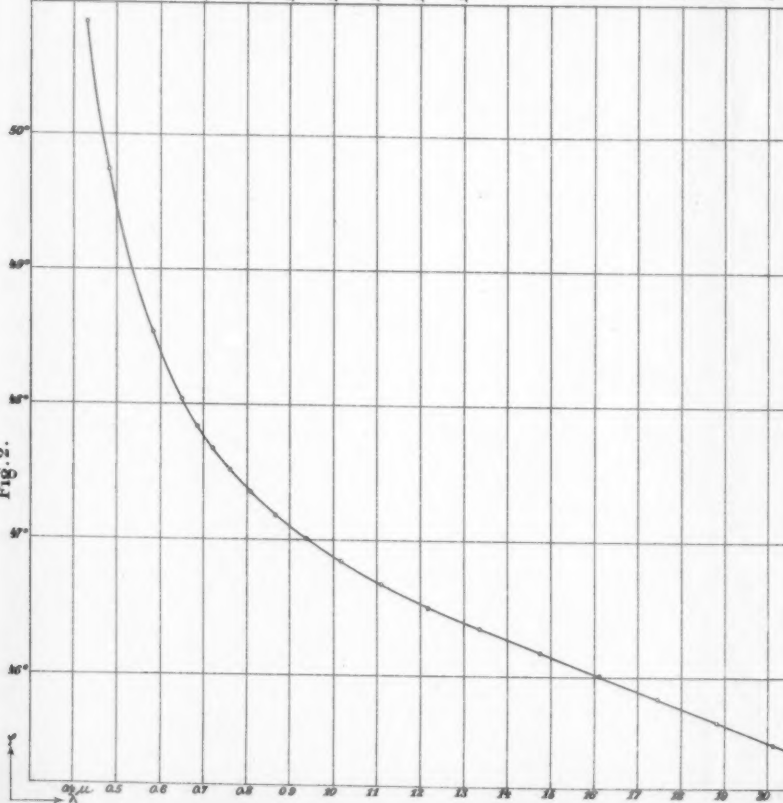
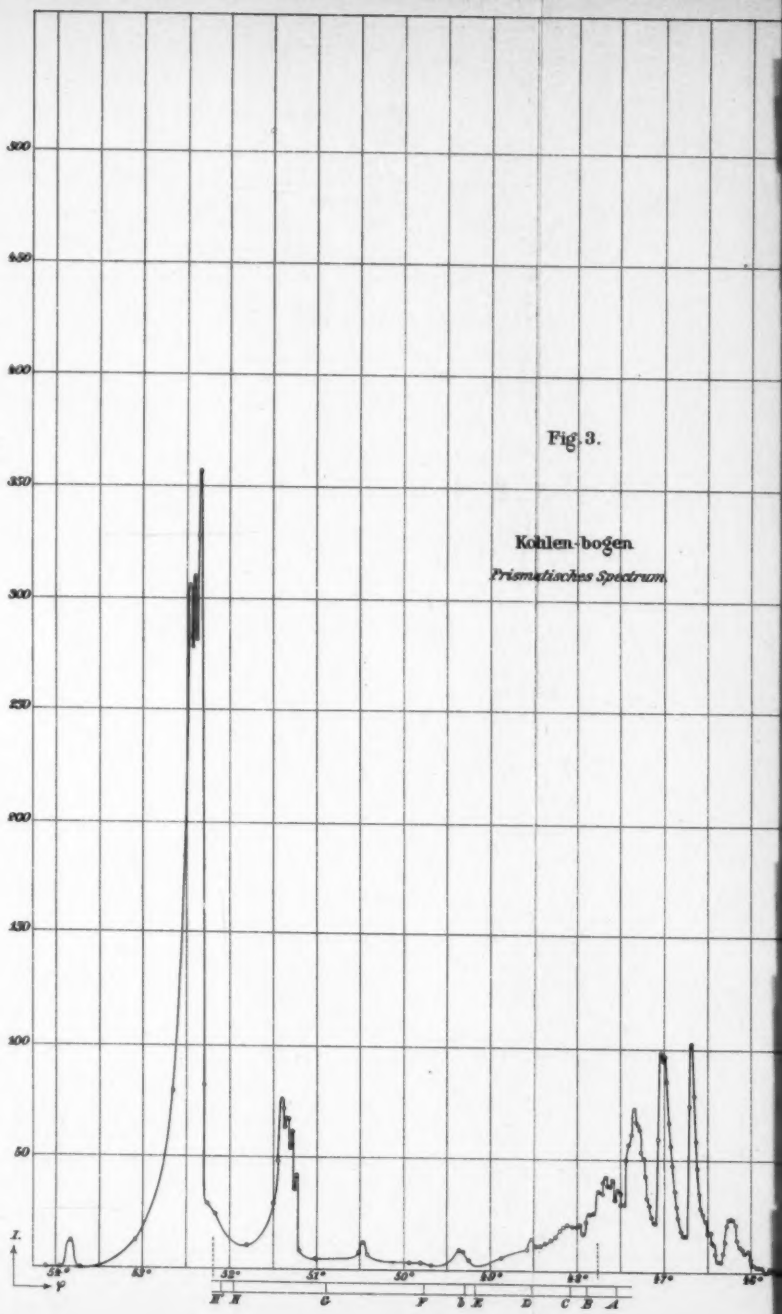
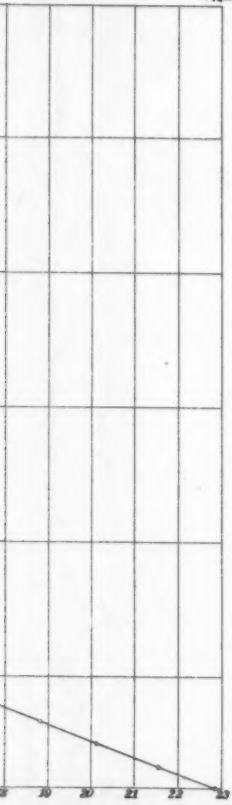
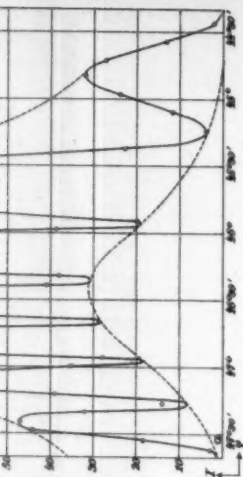
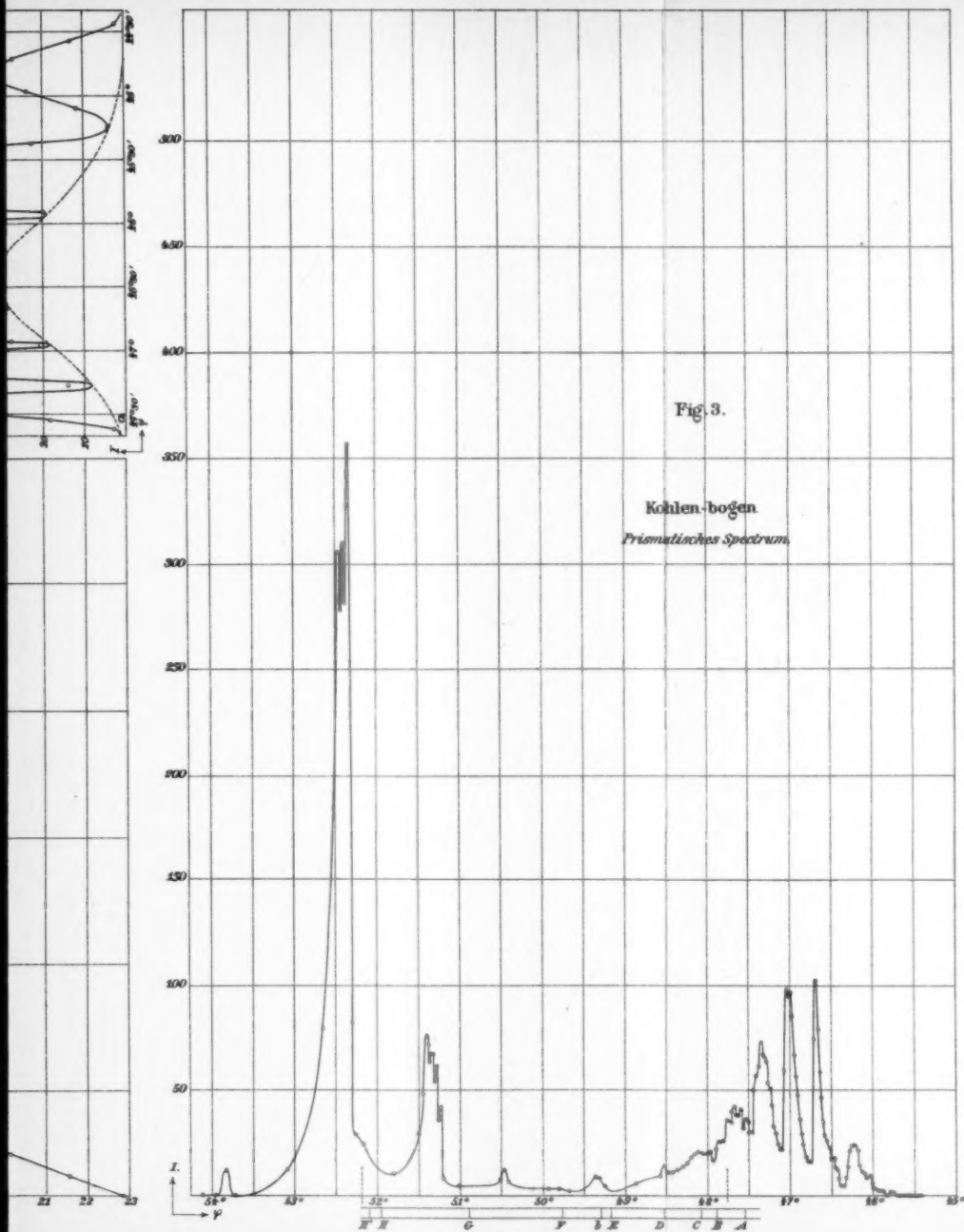


Fig. 2.



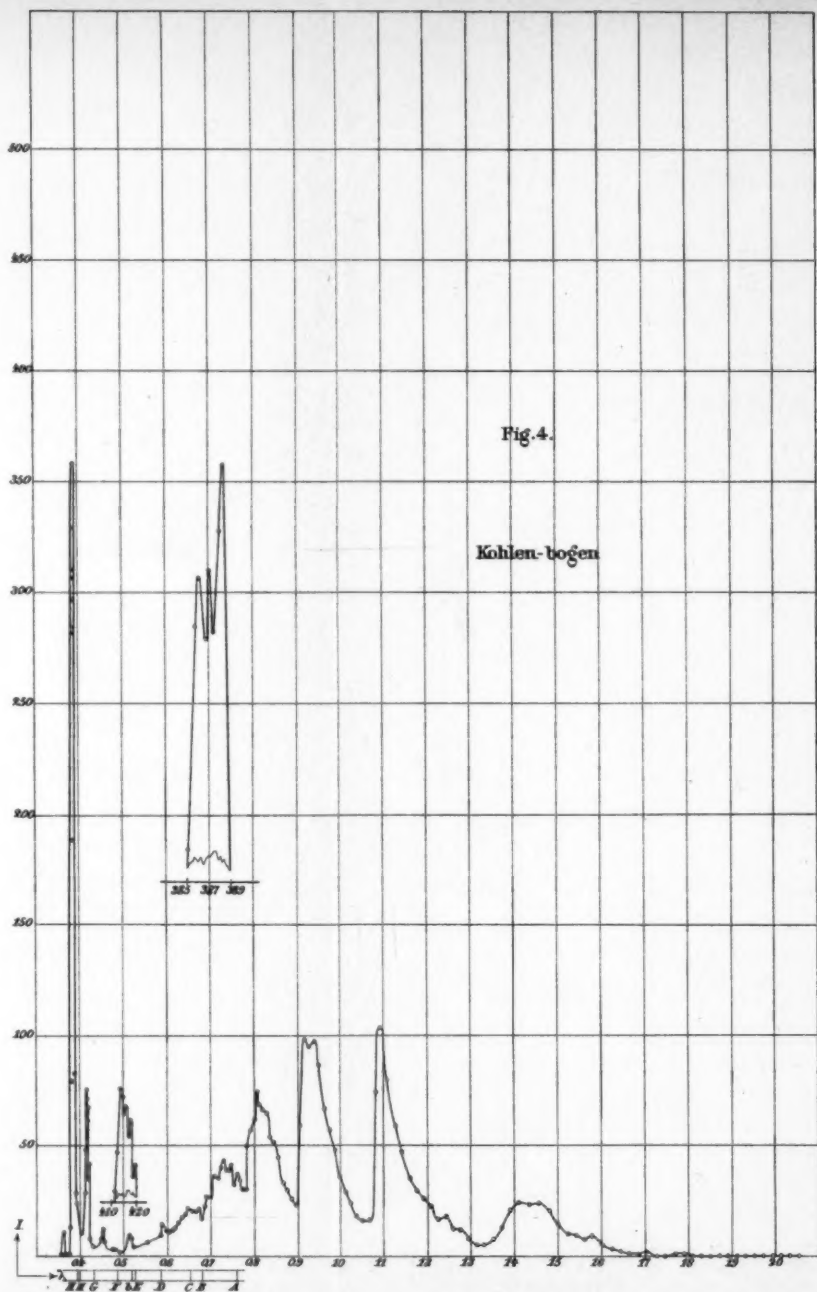


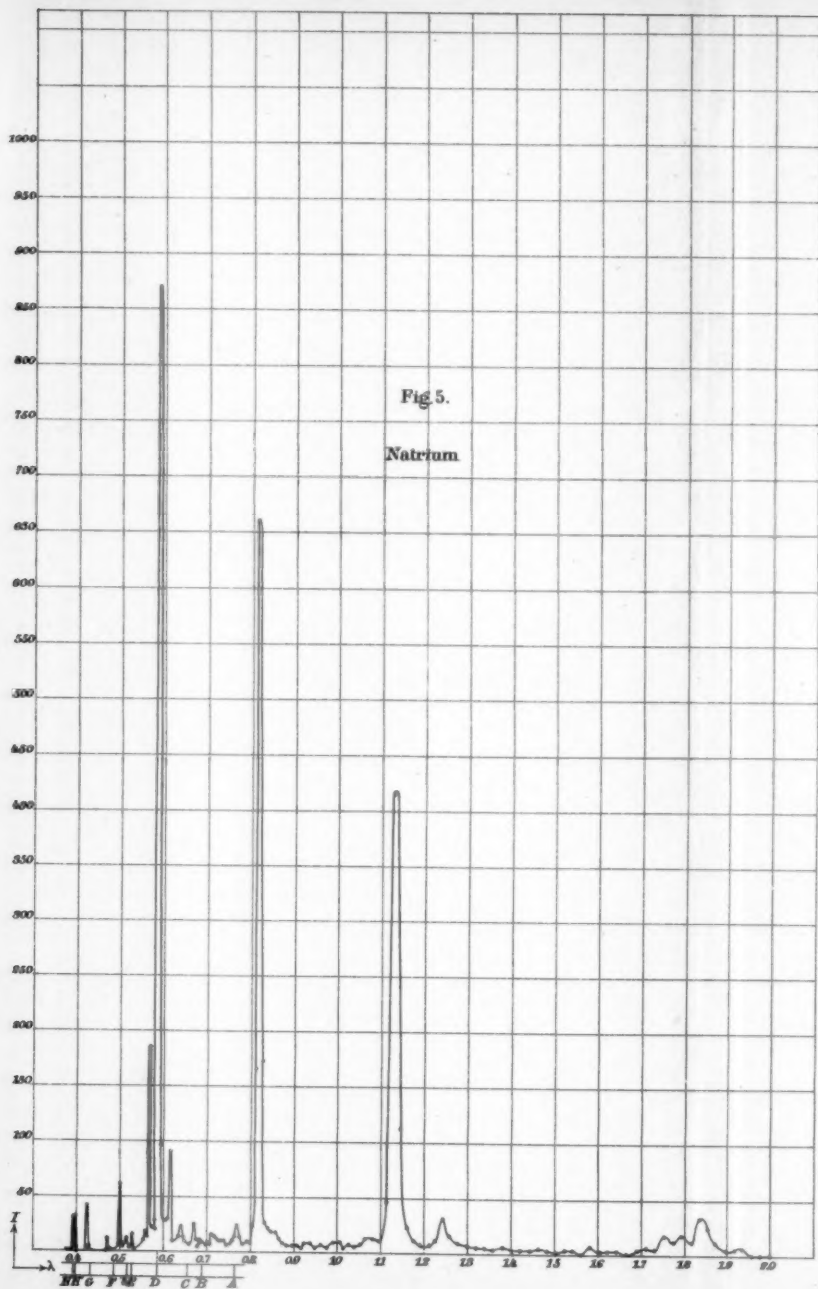
B. W. Snow.

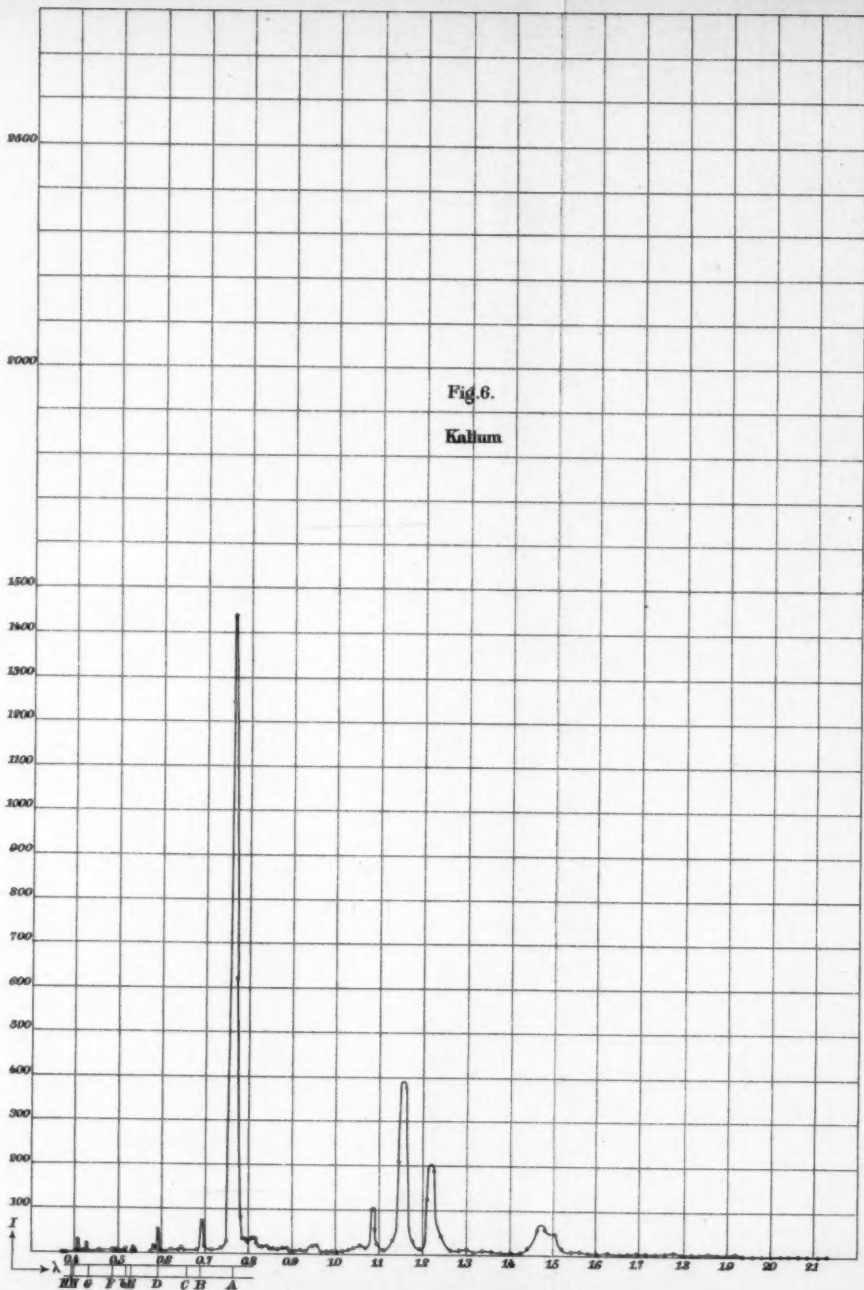


B.W. Snow.









B. W. Snow.

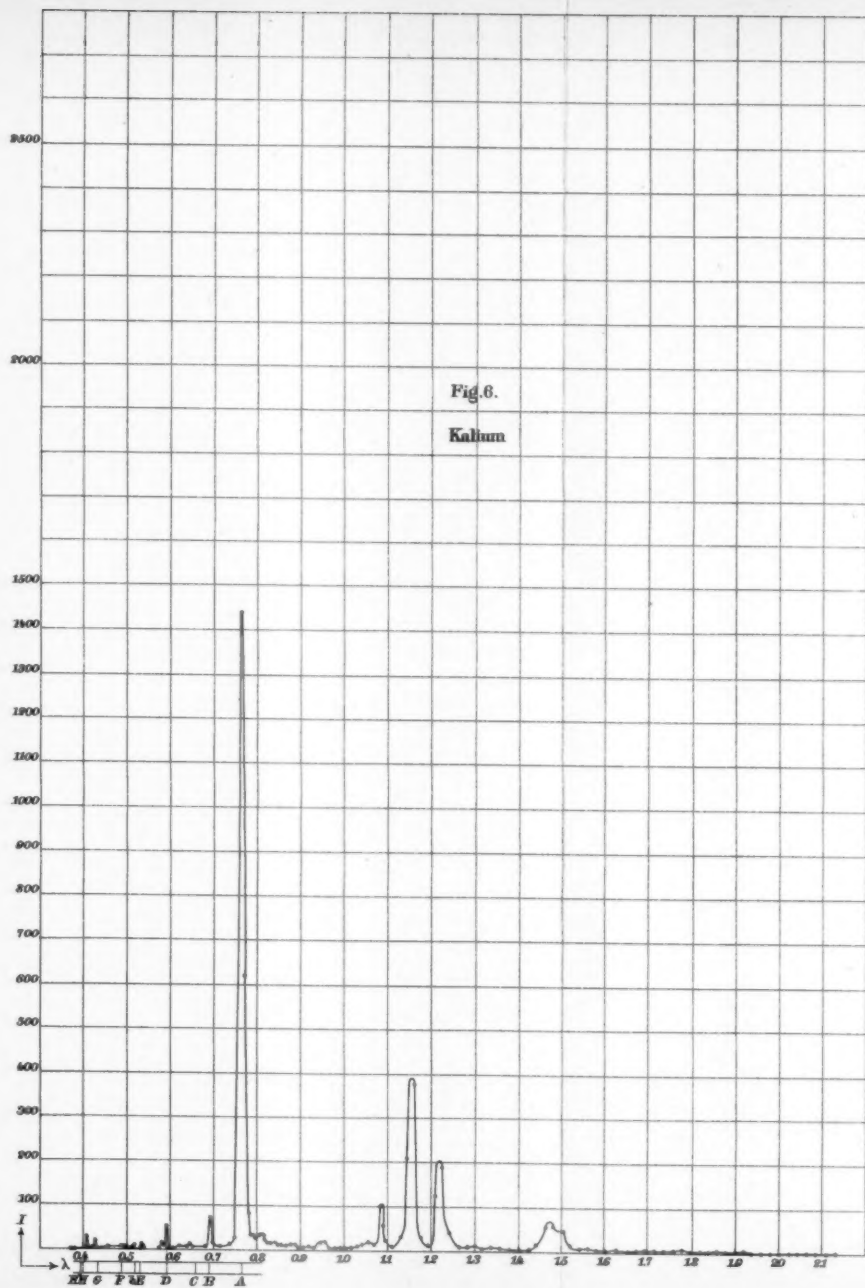
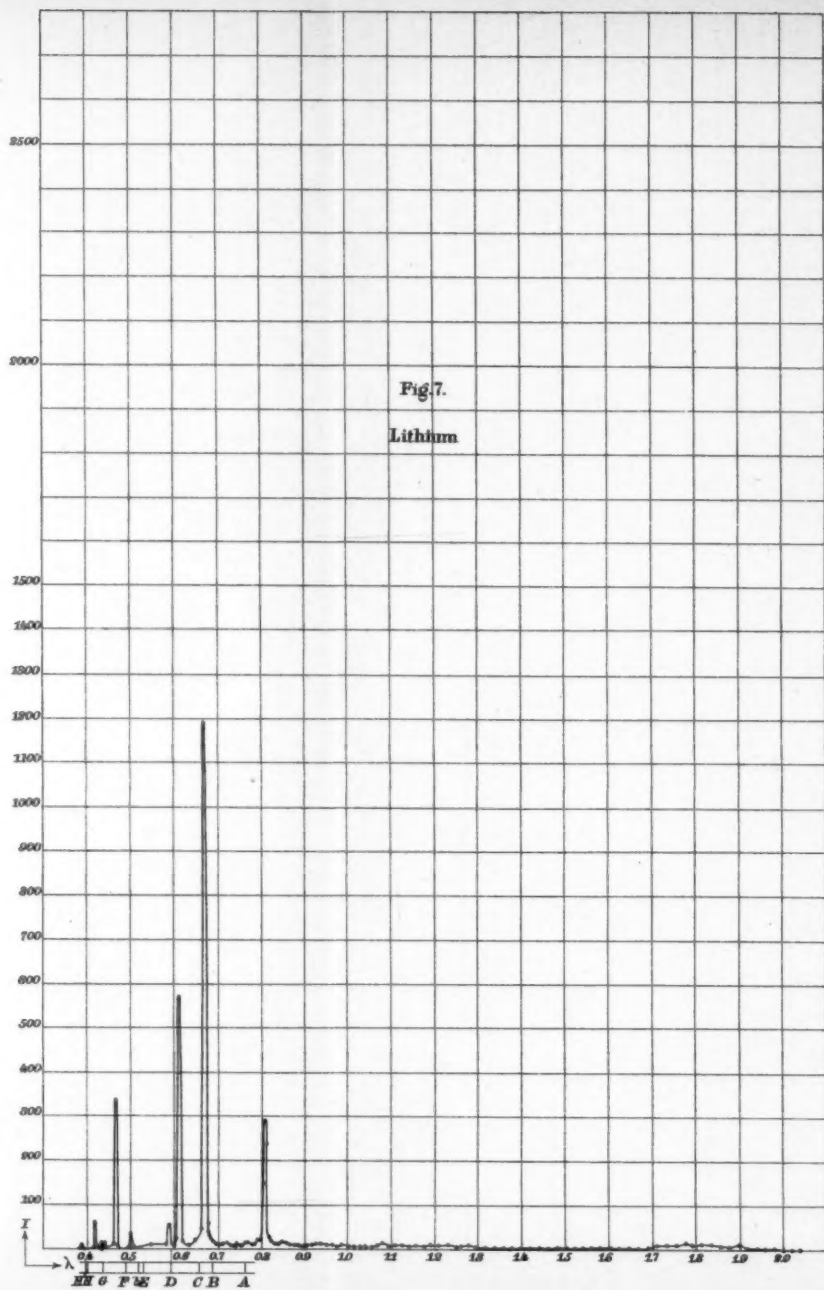


Fig. 6.

Potassium

B. W. Snow.



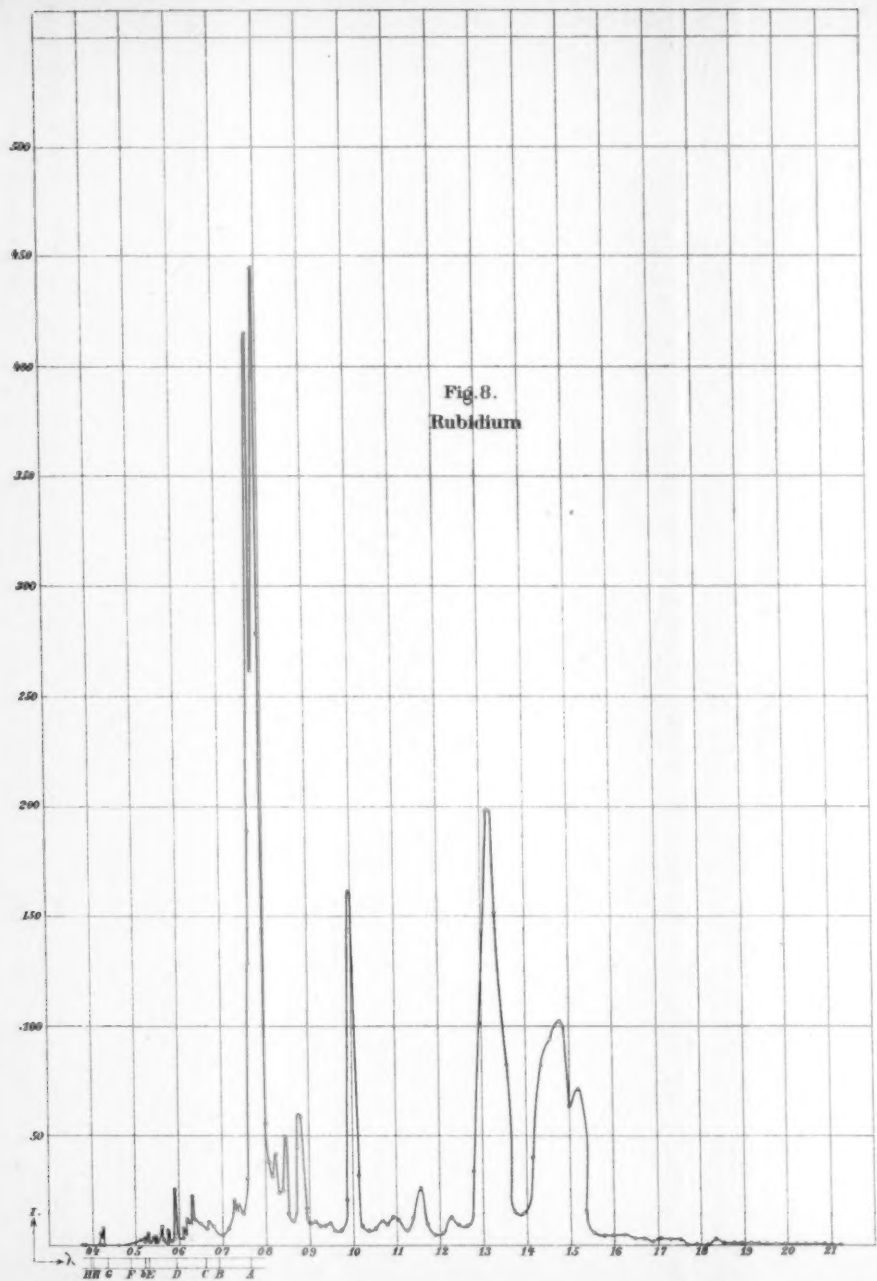
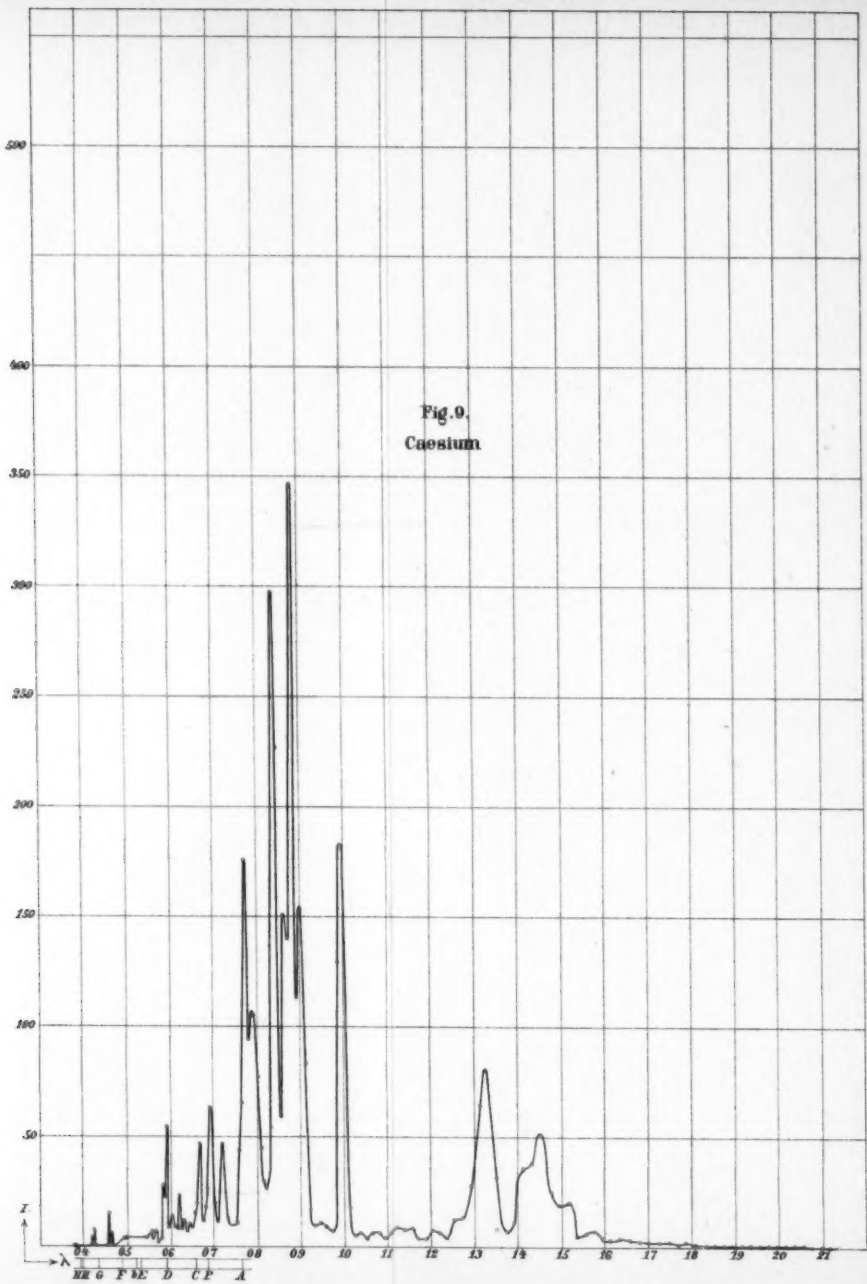


Fig. 8.  
Rubidium



B. W. SNOW.

Lith. Anst. v. C. Kirst, Leipzig.



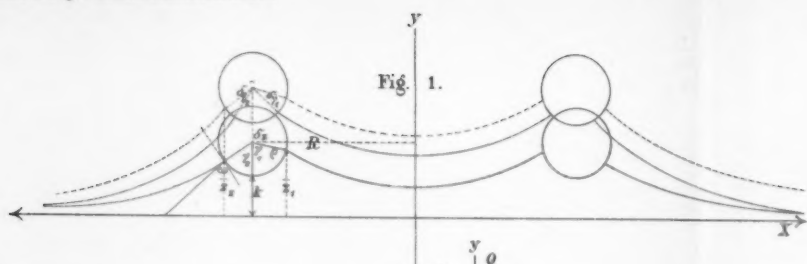


Fig. 2.

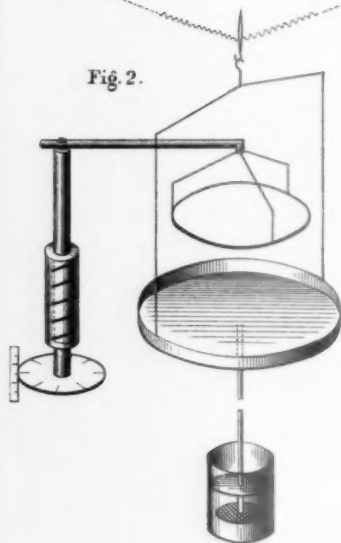


Fig. 4.

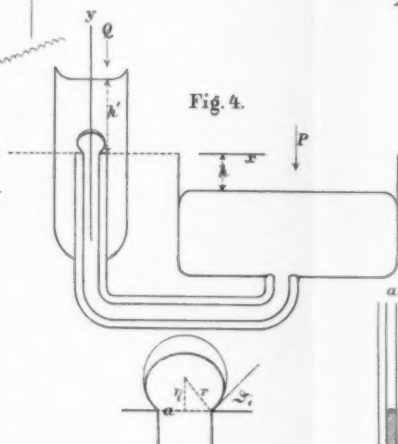


Fig. 3.



Fig. 6.

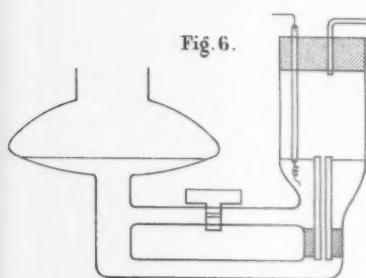


Fig. 5.

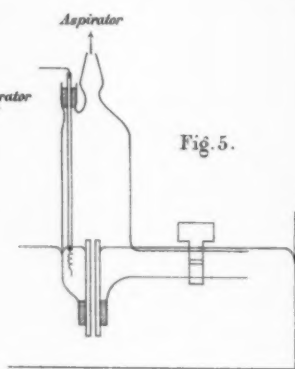
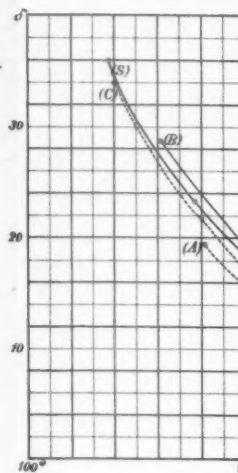
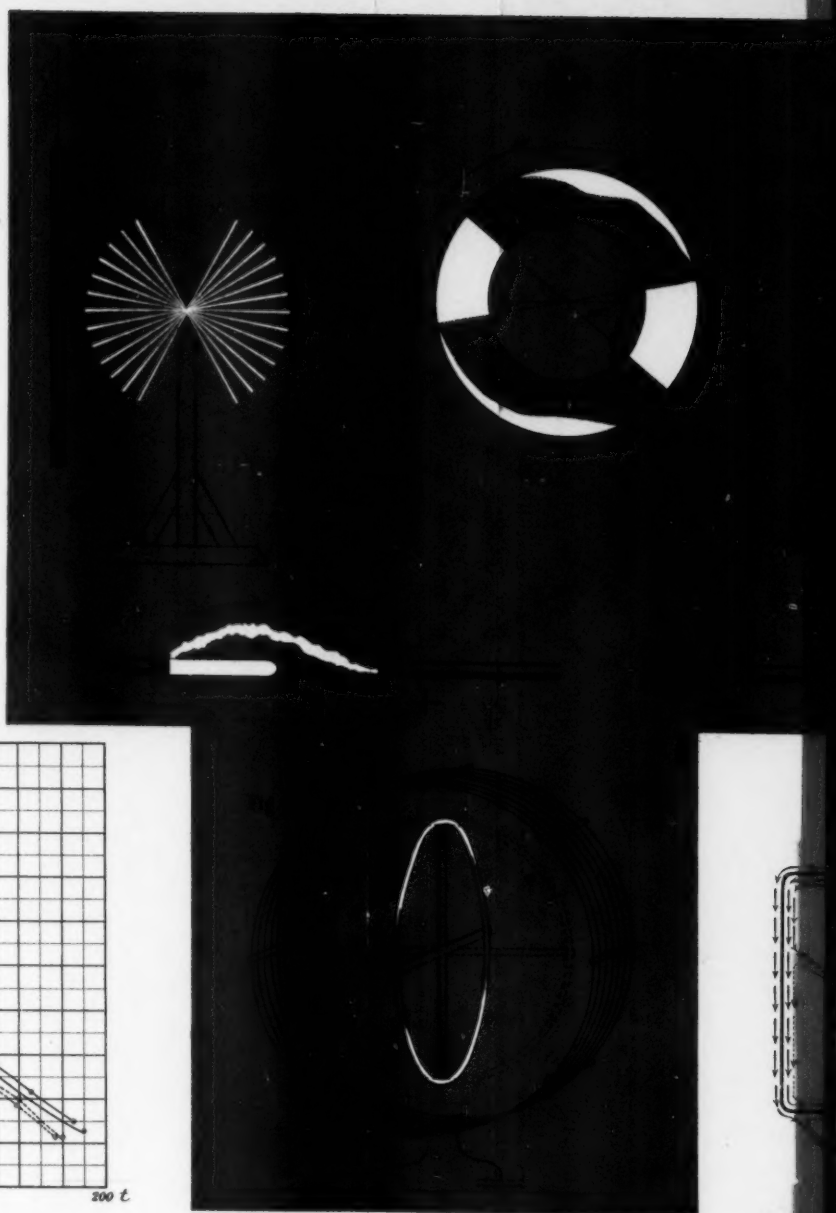
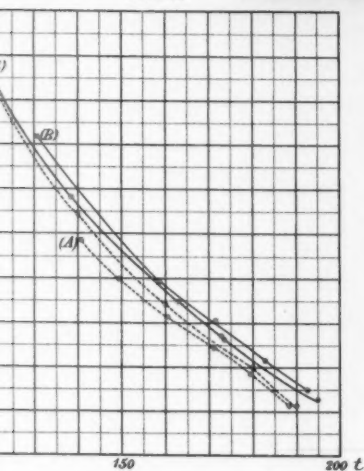
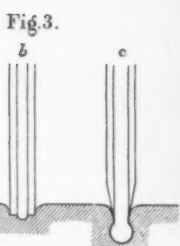
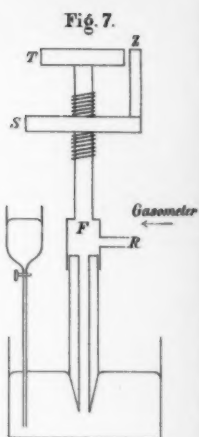
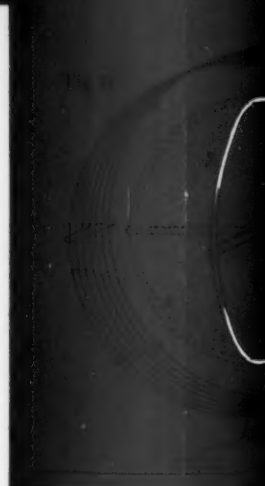
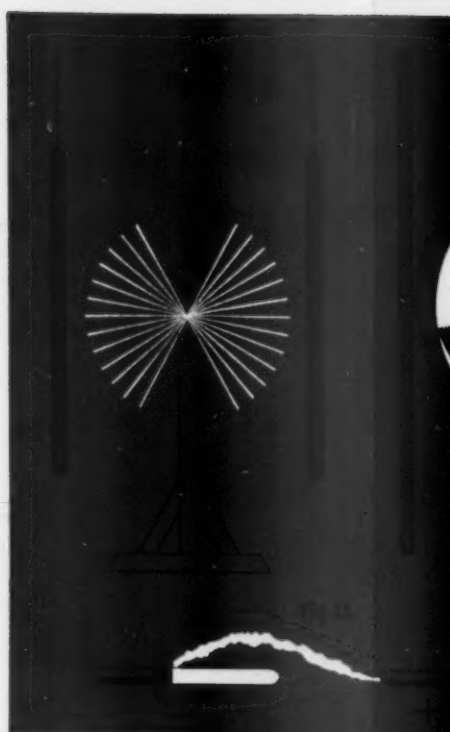
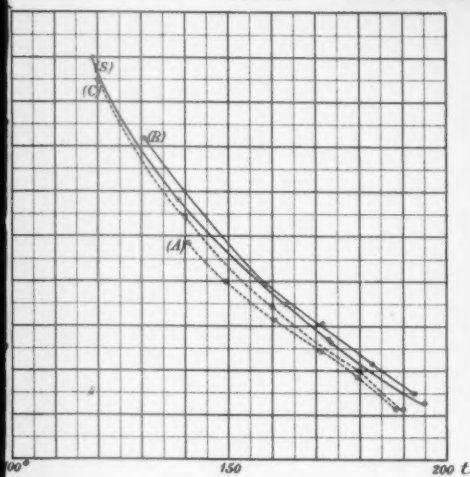
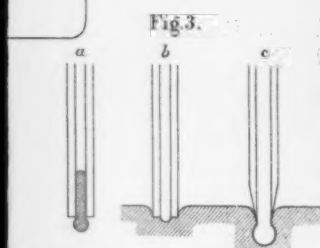
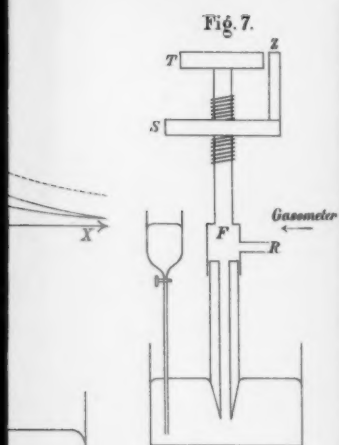


Fig. 15.





ator Fig.1-7. Lehmann Fig.8 -14. Galitzine Fig.15.



Cantor Fig. 1-7. Lehmann Fig. 8-14. Galitzine Fig. 15.

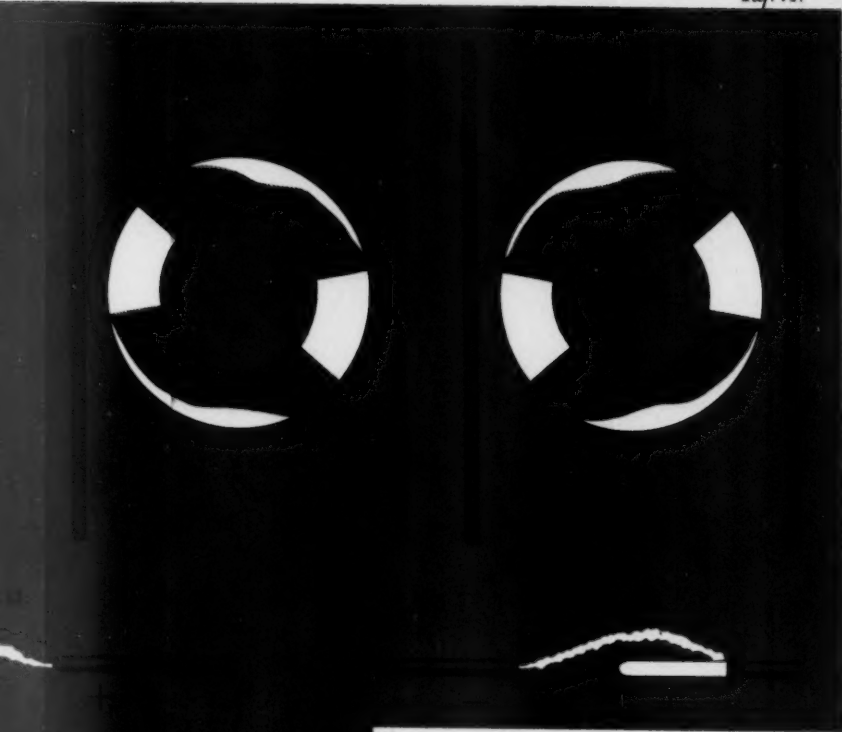


Fig. 12.

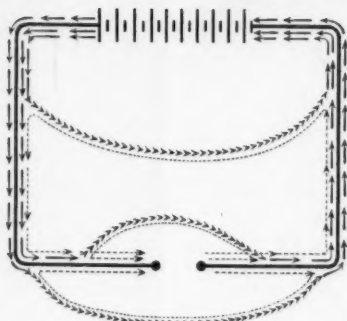


Fig. 9.

Abweichungen der Reductionscoefficienten  $1 + \alpha + \beta t^2$   
verschiedener Beobachter von den Werthen der E.T.R.

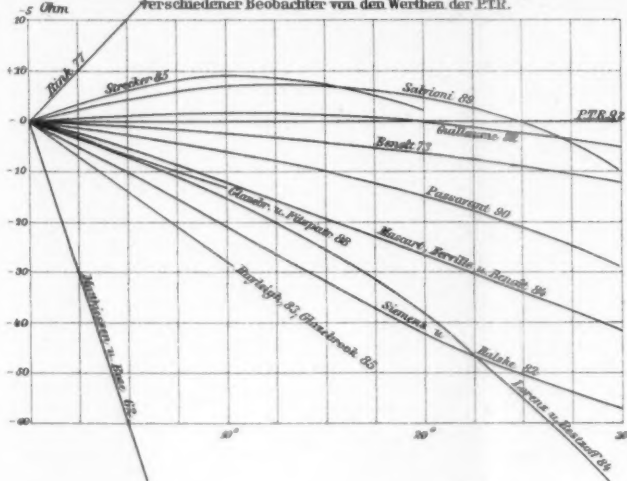


Fig. 1.

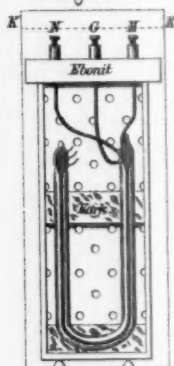


Fig. 2.

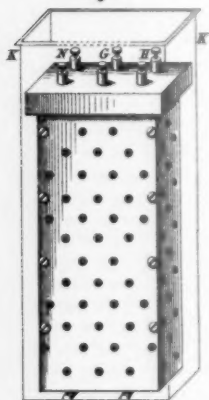


Fig. 4.

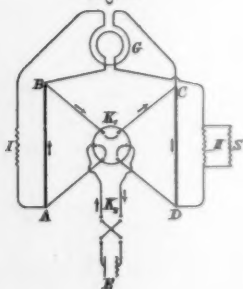


Fig. 5.

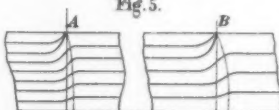


Fig. 3.



Fig. 6.

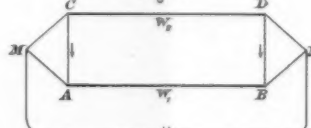


Fig. 7.

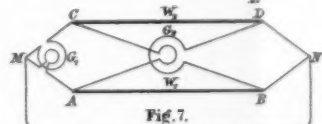
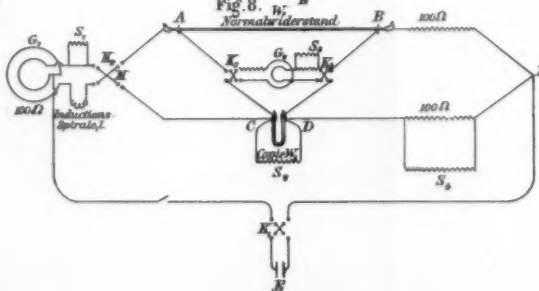
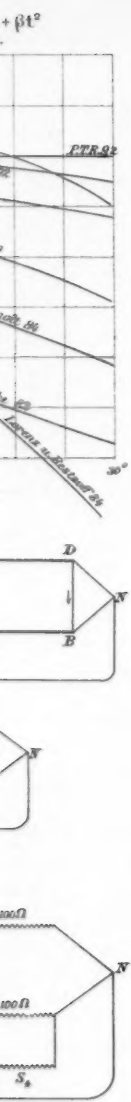
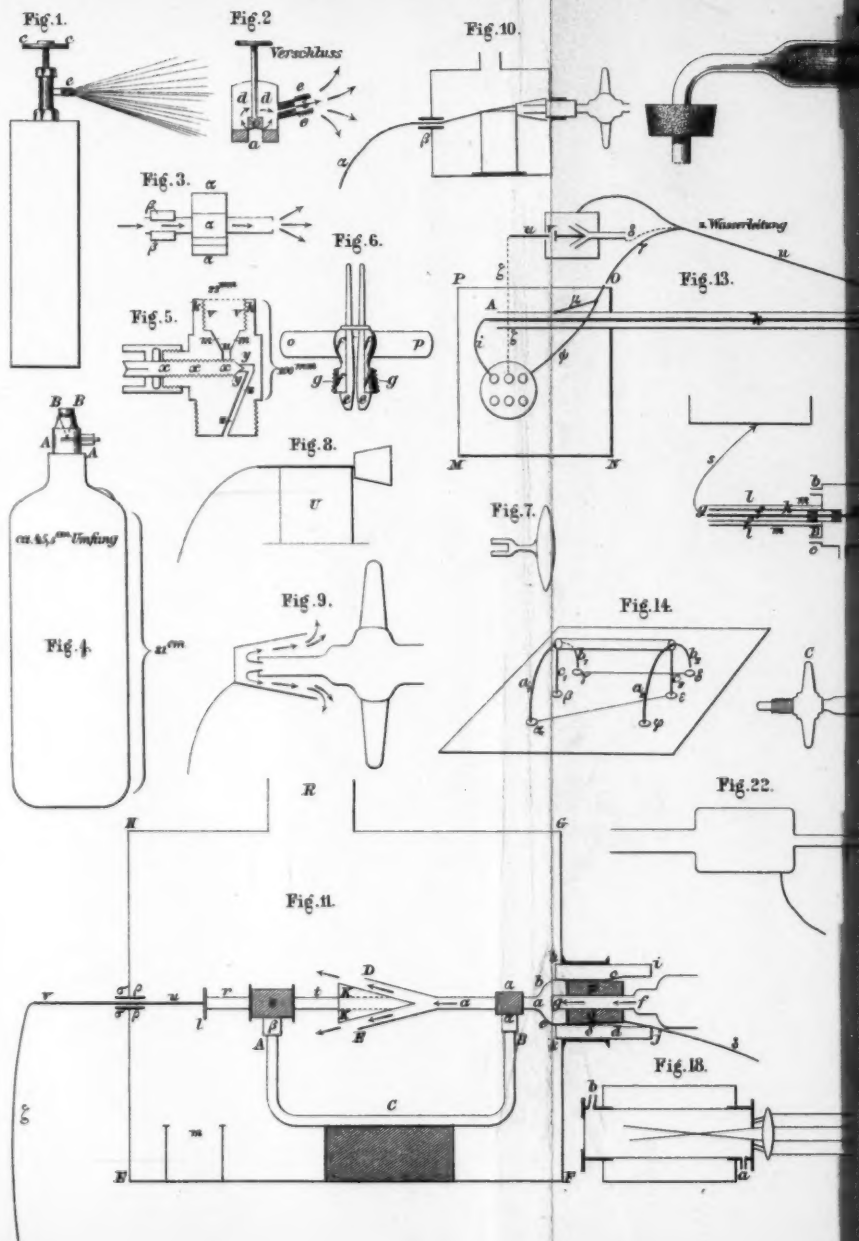


Fig. 8.  $W_r$   
Normalwiderstand





B.







B.

Taf. VII

Fig. 10.

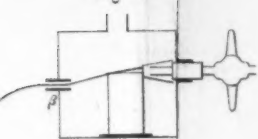


Fig. 12.



Fig. 15.

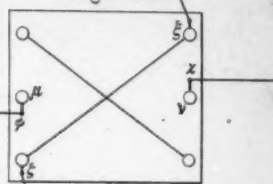


Fig. 21.

d. Wippe I

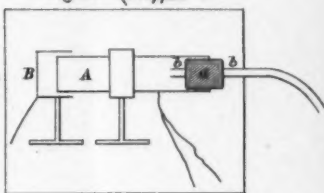


Fig. 13.

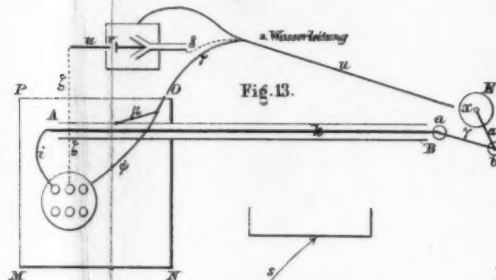


Fig. 16.

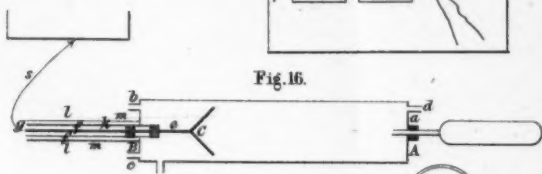


Fig. 7.



Fig. 14.

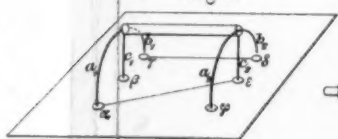


Fig. 19.

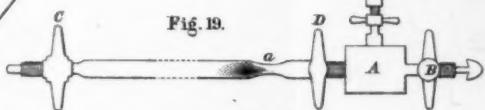


Fig. 17.

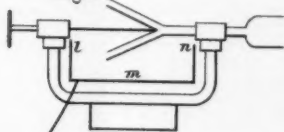


Fig. 23.

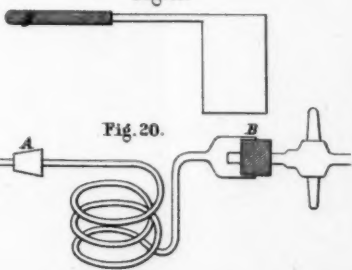


Fig. 20.

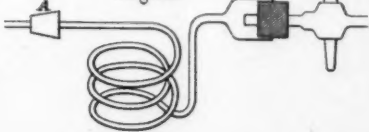


Fig. 22.

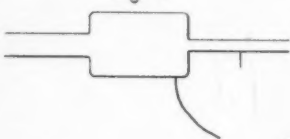


Fig. 18.

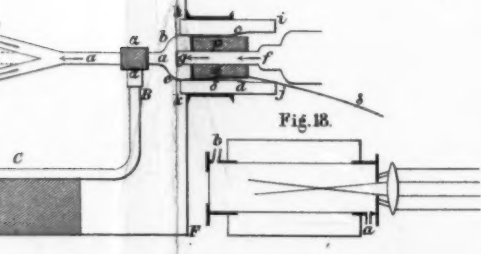


Fig. 12.

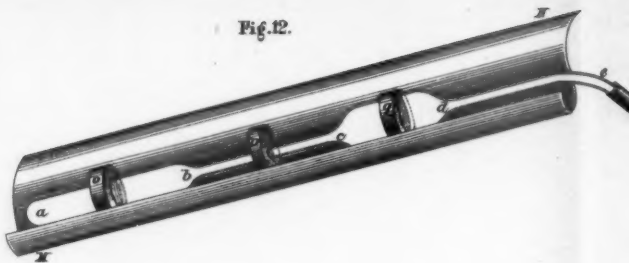


Fig. 13.

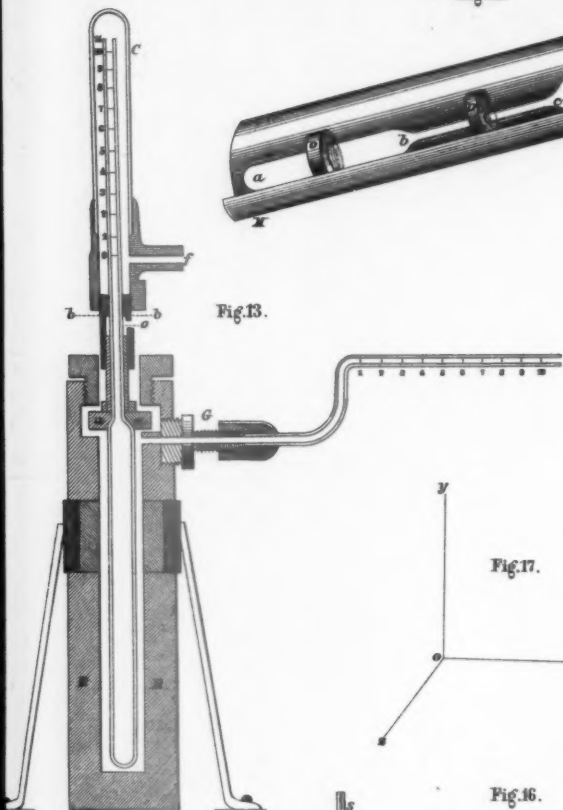


Fig. 17.



Fig. 16.

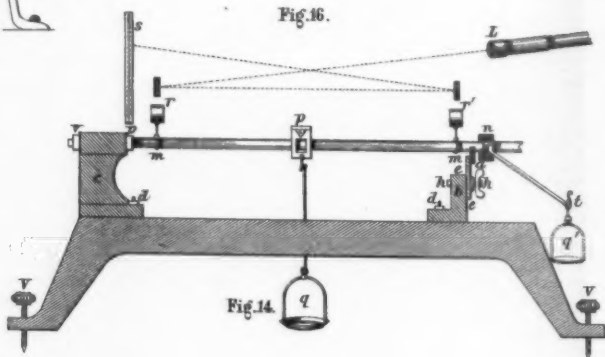


Fig. 15.



Fig. 14.





Fig. 2.

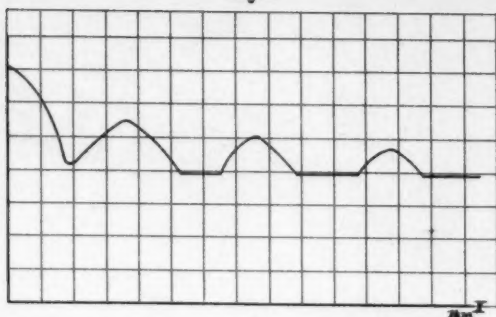


Fig. 4.

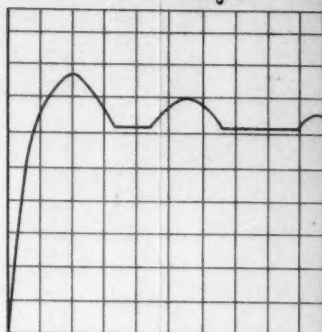


Fig. 1.

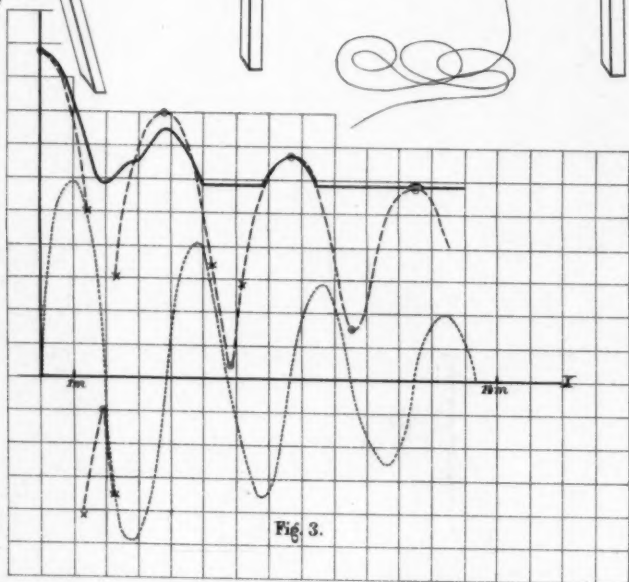
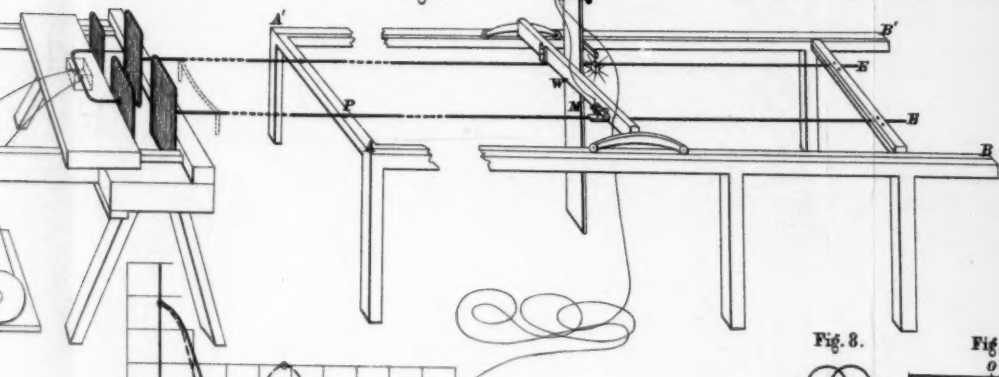


Fig. 3.

Fig. 8.

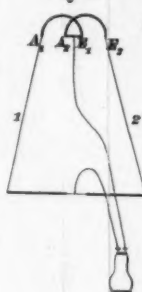


Fig. 6.

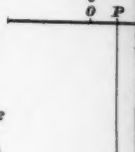
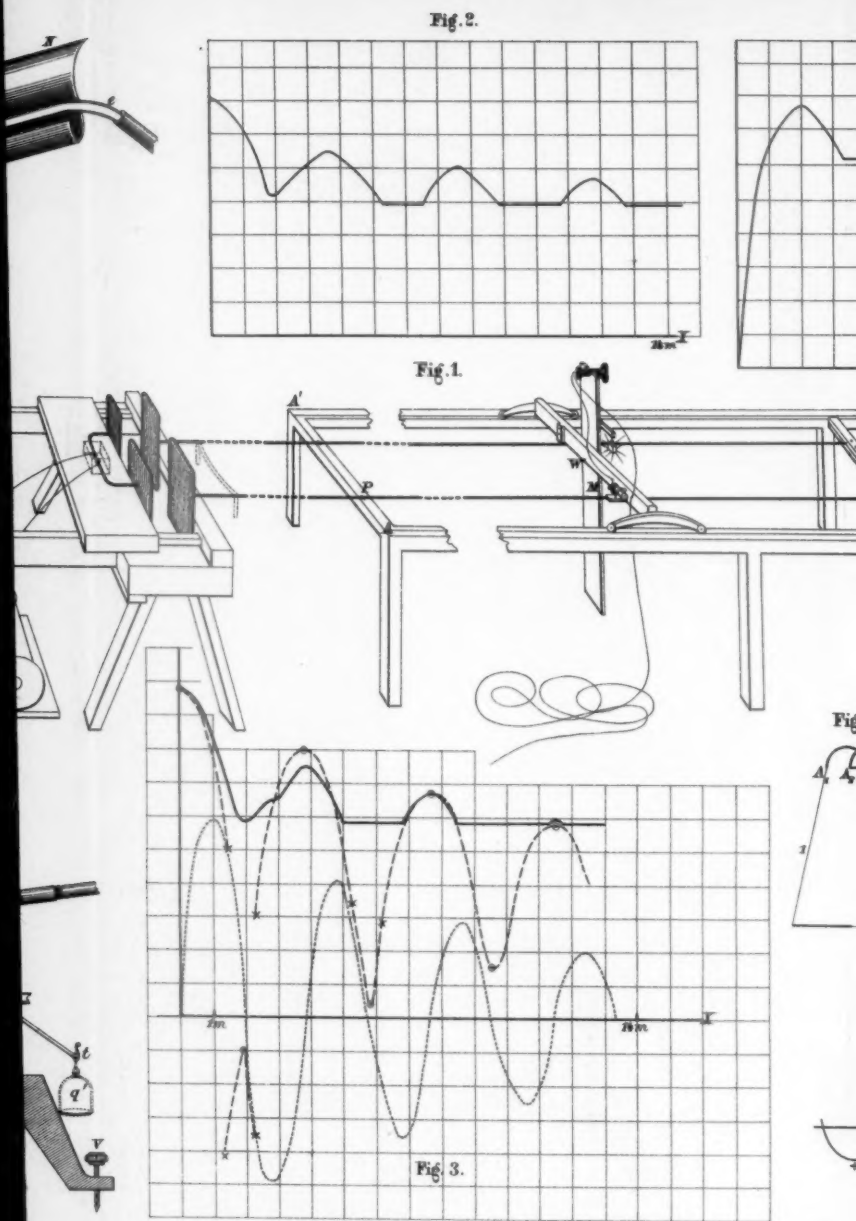


Fig. 5.



Birkeland Fig. 1-6. Wien Fig. 7-11. de Metz Fig. 12-17.



Birkeland Fig. 1-6. Wien Fig. 7-11. de Metz Fig. 12-17.

Fig. 4.

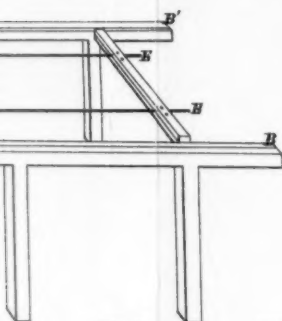
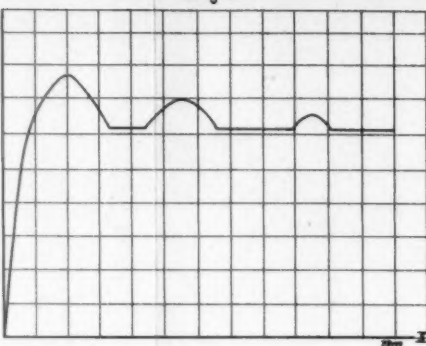


Fig. 6.

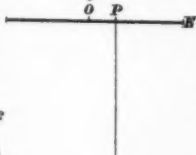


Fig. 8.



Fig. 5.

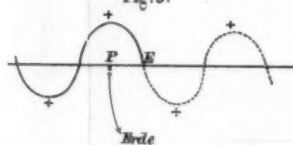


Fig. 10.

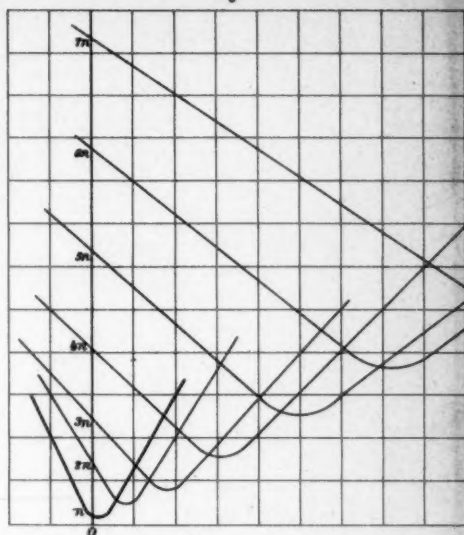


Fig. 11.

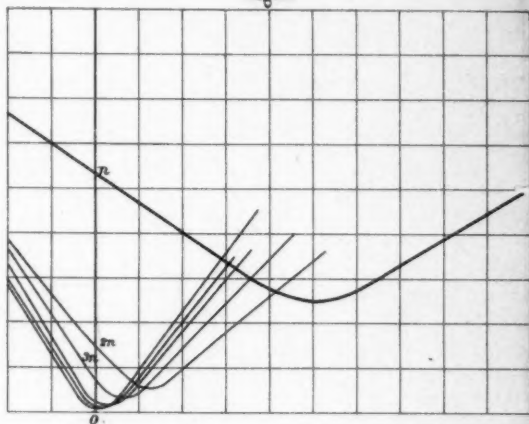


Fig. 9.

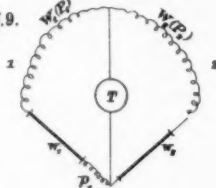
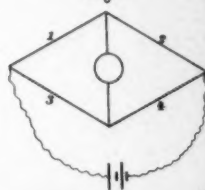
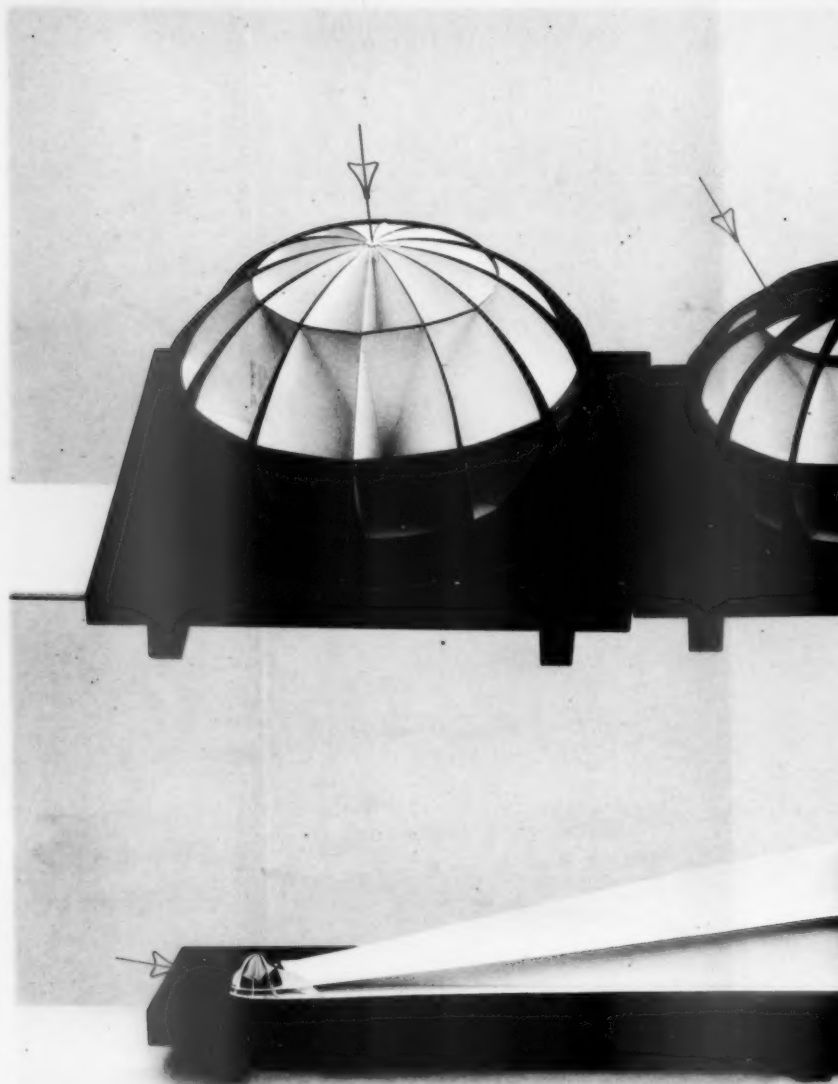
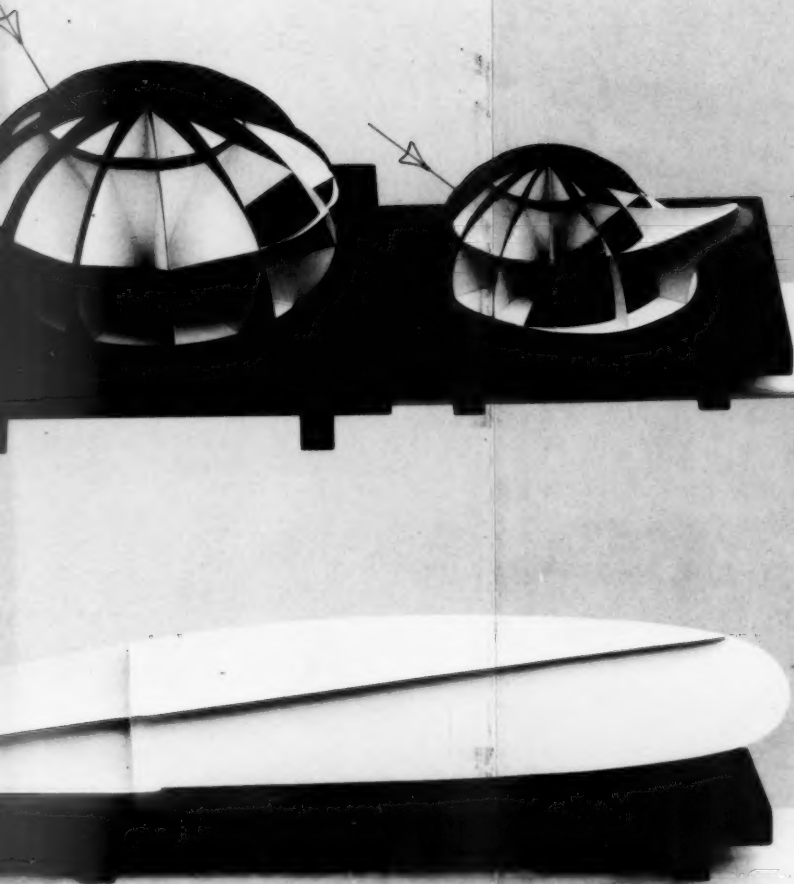


Fig. 7.







Chr. Wiener.